



6^{TO} CALL FOR
PAPERS

Contribuyendo al desarrollo
del sistema financiero

Memorias

Call For Papers 2022

**Aso
Ban
Caria**

Acerca la
Banca a los
Colombianos

PRESENTACIÓN

Para Asobancaria, incentivar la producción científica de alto nivel se ha convertido en un objetivo fundamental. Por ello, la asociación ha dispuesto los medios y las plataformas donde se han logrado producir y premiar investigaciones cuyos enfoques ayudan ampliamente a generar un mejor sistema financiero para nuestro país.

De esta manera, la versión 33 de nuestro Simposio de Mercado de Capitales estuvo acompañada por sexto año consecutivo de nuestros dos más grandes proyectos académicos: los concursos Call for Papers y Mejor Tesis de Maestría, con los que se lograron premiar producciones del más alto nivel y rigor científico en los campos de la economía y las finanzas. El objetivo sigue siendo poner a disposición de la comunidad académica, y en general de toda la sociedad, documentos que consideramos de suma utilidad a la hora de plantear nuevas políticas y de entender el sistema financiero colombiano.

Con esta edición mantenemos firme nuestro deseo y disposición de estrechar los vínculos entre el sector productivo y el académico. En consecuencia, otorgamos un espacio protagónico a los documentos ganadores durante el Simposio a través de estas memorias, con el fin de comunicar los hallazgos de nuestros participantes en materia de riesgo de liquidez, dolarización de pasivos bancarios y tasas de interés de mercado.

Por ello nos complace, como siempre, compartir aquí estos documentos, tanto los ganadores de la edición 2022 como aquellos que nuestros jurados consideraron de gran nivel e importancia académica.

Adicionalmente, agradecemos profundamente a los jurados que nos brindaron su apoyo durante esta edición, pues su preparación y experiencia en las áreas evaluadas fueron garantía de los más rigurosos estándares para calificar los trabajos presentados en estos concursos. Así mismo, felicitamos a nuestros ganadores y a todos los participantes, a quienes motivamos a seguir esforzándose por construir una academia sólida y capaz de seguir constituyéndose como un pilar de la sociedad colombiana.

Finalmente, los invitamos a participar en posteriores versiones de nuestros concursos y así seguir fortaleciendo los vínculos entre la academia, el sector financiero y el país.

Jonathan Malagón
Presidente Asobancaria

INDICE GENERAL

Modelo de Contagio Dinámico, una aplicación a la extensión del modelo de Cox-Ingersoll-Ross incorporando saltos David Andrés Paloma Cruz	4
The Pricing of Liquidity Risk in the Colombian Stock Market. Daniel Machuca Acevedo	40
Dolarización de pasivos bancarios y el rol de Basilea III en Colombia. Alfredo Villca Condori	70



**Modelo de
Contagio Dinámico,
una aplicación a la
extensión del modelo
de Cox-Ingersoll-Ross
incorporando saltos**

**David Andrés
Paloma Cruz**



INTRODUCCIÓN

Las tasas de interés pueden ser consideradas como el objeto mas importante dentro de las matemáticas financieras, en especial por su papel fundamental dentro de conceptos como la acumulación del dinero o valoración de productos de renta fija; así que, el estudio de las propiedades asociadas a la estructura a plazos de las tasas de interés es muy importante para quienes realizan actividades en las cuales deben manipular tasas de interés, ya que estas propiedades suelen estar vinculadas a los productos financieros sobre los cuales actúa su influencia a tal punto que los cambios que tiene la tasa de interés se ven inmediatamente reflejados sobre todos los productos del mercado sobre el cual se esta considerando.

Dentro del amplio conjunto de tasas de interés dentro de los diferentes tipos de mercados, las tasas de corto plazo resultan ser sobre las cuales hay una mayor atención, debido a que están involucradas en transacciones las cuales se dan dentro de un periodo de tiempo relativamente corto y con productos que están siendo negociados constantemente, de forma que la comprensión e interpretación del manejo de la correspondiente tasa de interés que esta rigiendo el mercado, el producto negociado y los agentes involucrados; es de vital importancia dentro de las decisiones y proyecciones que se tienen en cuenta a la hora de negociar un producto que involucra una tasa de corto plazo. El comportamiento cuantitativo de una tasa de interés se ve reflejado por su estructura a plazos, la cual recoge el valor de la tasa de interés para diferentes fechas de maduración o vencimiento, es decir, fechas hasta las cuales el valor de la tasa de interés negociada tiene efecto o validez sobre el producto objeto de negociación; la relación descrita por la estructura a termino no es determinista, su naturaleza corresponde a la de un objeto con un comportamiento estocástico, ya que no es posible determinar a través de una fórmula analítica la relación entre la madurez y la tasa de interés descrita por la estructura a termino. Lograr plantear un modelo para una tasa de interés ayuda a estimar el valor implícito de dicha tasa para fechas de vencimiento las cuales no son observables o no están definidas por el mercado, es así que esta resulta ser hoy un área de investigación bastante amplia y con gran variedad de problemas por resolver y en la cual se plantean soluciones que pretender prescindir del enfoque analítico y optar por el enfoque estocástico.

Los esfuerzos realizados por diferentes investigadores a través de los años hacen que en la actualidad existan una gran variedad de modelos los cuales han logrado conciliar el comportamiento intuitivo y observable de las tasas de interés con resultados matemáticos analíticos, numéricos y estocásticos; los cuales ofrecen resultados que se ajustan muy bien a los valores observados y que también reflejan algunas de las características del mercado sobre el cual se hace uso de la tasa de interés que se desea modelar. Los primeros modelos propuestos para estimar la estructura a término de una tasa de interés se apoyan en los procesos estocásticos, y suelen ser conocidos como modelos de un solo estado, dentro de este conjunto se encuentran los modelos de Vasicek (1977) y Cox-Ingersoll-Ross (1985), estos dos modelos son los mas usados ya que su implementación es relativamente sencilla y se apoyan en el historial de valores de la tasa para los procesos de calibración o estimación de los parámetros del modelo.

Actualmente y como resultado de las diversas implementaciones de estos modelos se sabe que la gran mayoría carecen de la capacidad de reflejar los choques y eventos de

estrés los cuales afectan un mercado específico y por tanto las tasas de interés y su estructura a término; este es un detalle importante que en ocasiones se puede evidenciar en el comportamiento de los precios correspondientes a los bonos del tesoro de los países, precios que son calculados a partir de la estructura a término de una cierta tasa de interés la cual constituye el indicador más útil y transparente de la situación monetaria del país y cómo esa reacciona a las políticas internas y externas que afectan el mercado, este tipo de estructura suelen tener los cuales no logran ser captados por los modelos tradicionales, haciendo que sea necesario buscar alternativas a los modelos existentes. Es así que en los últimos años y debido a las diferentes situaciones de crisis locales y globales que han generado grandes choques sobre la estructura a término de las tasas de interés, algunos investigadores han concentrado sus esfuerzos en lograr mejorar los modelos existentes o crear nuevos con la capacidad de reflejar los choques de la estructura a término producidos por los eventos de crisis que afectan a una economía.

La reciente pandemia provocada por la COVID-19 y que llevo a los gobiernos del mundo a establecer medidas de aislamiento las cuales obligaron a la mayoría de las empresas a bajar la producción y por tanto los intercambios de compra y venta; además de afectar los pagos de las deudas en distintos niveles, hasta el punto en que para Colombia bajó la calificación crediticia otorgada por diferentes calificadoras de riesgo a nivel mundial. Los efectos económicos de la pandemia también se manifestarían en las decisiones tomadas por los bancos centrales al rededor del mundo, muchos de los cuales tuvieron que bajar las diferentes tasas de interés para mantener una dinámica de la economía lo más cercana posible a las condiciones antes de la pandemia y así amortiguar los efectos negativos a corto y largo plazo sobre el desempeño de la economía local y su actividad dentro de la economía global.

En este trabajo se busca implementar los resultados sobre el Proceso de Contagio Dinámico con Difusión realizado por Zhao [11] y Dassios [3] los cuales están planteados sobre un modelo de intensidad estocástica inspirados en el modelo CIR, el cual ofrece la capacidad de también simular saltos en el comportamiento de la estructura de intensidad que se esta recreando. Teniendo en cuenta estas características del modelo se busca utilizar las ideas presentes en Dassios [2] para la valoración de bonos utilizando datos observados de las tasas de interés utilizadas para la emisión de TES de corto plazo por parte del banco de la república, teniendo en cuentas el histórico de valores reportado por el banco de la república de forma semanal a partir del año 2017 hasta el primer trimestre de 2022, para así aproximarse a una idea de que tan eficiente es el modelo para al momento de recrear no sólo el comportamiento de la tasa en periodos de relativa calma si no que también la capacidad de recrear los saltos observados sobre la estructura a término de la tasa de interés escogida.

En el capítulo 1 se hace un recuento de los resultados teóricos trabajados por Dassios y Zhao en sus diferentes artículos, para así caracterizar el Proceso de Contagio Dinámico con Difusión y poderse hacer una idea del alcance que este puede tener como modelo de tasa corta o herramienta de valoración. El capítulo 2 aborda conceptos básicos entorno a los bonos tales como, los riesgos que rodean la inversión sobre un bono, sus principales características y las definiciones a tener en cuenta para el ejercicio de valoración de uno. El capítulo 3 describe los aspectos que se tuvieron en cuenta para construir el proceso de automatización con el cual se realizaron las simulaciones y cálculos asociados a los resultados teóricos escogidos para ser implementados. Dentro del capítulo 4 se hace un descripción de los datos utilizados para la implementación de algunos resultados teóricos escogidos, también se realiza una exposición del proceso de como se llevo a cabo la implementación y los detalles más importantes de los resultados obtenidos. Para finalizar, se realizan las muestras las conclusiones fruto del análisis de los resultados obtenidos.

1. Proceso de Contagio Dinámico con Difusión

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos por Angelos Dassios y Hongbiao Zhao en sus diferentes trabajos, los cuales son necesarios para el desarrollo de la teoría y la construcción de las respectivas simulaciones que se presentarán más adelante. Para empezar, se presentan los resultados y definiciones tomados de [5] sobre el Proceso de Contagio Dinámico con Difusión en riesgo de crédito, estos resultados son una extensión de la teoría desarrollada por los autores ya mencionados en [3] y [11] donde se presenta la definición del proceso de contagio dinámico sin difusión y se va complementando con los resultados presentados en [2], los cuales involucran el término de difusión σ . Por último se presentan los resultados y algoritmos necesarios para una simulación eficiente del proceso de contagio dinámico con difusión presentados en [4].

1.1. Definición del Proceso de Contagio Dinámico con difusión

Definición 1.1.1 (Dassios & Zhao [5], página 3). **El proceso de contagio dinámico con difusión (DCPD por sus siglas en inglés) es un proceso puntual** $N \equiv \{T_k^{(2)}\}_{k=1,2,\dots}$ **con la intensidad (condicional) no negativa Ft-estocástica dado por:**

$$\lambda_t = a + (\lambda_0 - a)e^{-\delta t} + \sigma \int_0^t e^{-\delta(t-s)} \sqrt{\lambda_s} dW_s + \sum_{0 \leq T_i^{(1)} < t} Y_i^{(1)} e^{-\delta(t-T_i^{(1)})} I_{\{T_i^{(1)} \leq t\}} + \sum_{0 \leq T_k^{(2)} < t} Y_k^{(2)} e^{-\delta(t-T_k^{(2)})} I_{\{T_k^{(2)} \leq t\}}, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

donde

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es la historia del proceso N_t con respecto al cual $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso adaptado;

$\lambda_0 > 0$ es la intensidad inicial es el tiempo $t = 0$;

$a \geq 0$ es la constante del nivel de reversión a la media;

$\delta > 0$ es la constante de la tasa de reversión a la media;

$\sigma > 0$ es la constante de volatilidad asociada a la parte de difusión del proceso de intensidad;

$\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar;

$\{Y_i^{(1)}\}_{i=1,2,\dots}$ es la magnitud de los saltos externos¹, es una sucesión de variables aleatorias dependientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $H(y)$, $y > 0$;

¹En los trabajos de Dassios & Zhao se hace referencia a estos como *externally-excited jumps*.

$\{T_i^{(1)}\}_{i=1,2,\dots}$ son los tiempos de llegada de un proceso de Poisson M_t con tasa constante $\rho > 0$;

$\{Y_k^{(2)}\}_{k=1,2,\dots}$ son la magnitud de los saltos internos², es una sucesión de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $G(y)$, $y > 0$;

Las sucesiones $\{Y_i^{(1)}\}_{i=1,2,\dots}$, $\{Y_k^{(2)}\}_{k=1,2,\dots}$, $\{T_i^{(1)}\}_{i=1,2,\dots}$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ son asumidas como independientes entre sí.

El Proceso de Contagio Dinámico con Difusión esta formado por la pareja (λ_t, N_t) , entendiéndose un contagio como un salto interno que hace crecer a N_t en una unidad, al igual que su homólogo bajo contagio dinámico sin el término de difusión, el proceso N_t resulta siendo un proceso estocástico de conteo el cual indica la cantidad de contagios (saltos internos) que llegan en un intervalo de tiempo $[0, t]$, de igual forma λ_t es un proceso de intensidad el cual indica la probabilidad de un contagio dentro de un intervalo infinitesimal de tiempo $[t, t + \Delta_t]$, λ_t satisface, por consiguiente:

$$\begin{aligned} Pr [N_t + \Delta_t - N_t = 1 | \mathcal{F}_t] &= \lambda_t \Delta_t + o(\Delta_t) \\ Pr [N_t + \Delta_t - N_t > 1 | \mathcal{F}_t] &= o(\Delta_t). \end{aligned}$$

Debido a la definición 1.1.1 tanto N_t como λ_t son procesos de Markov y como consecuencia de esto el DCPD es también un proceso de Markov el cual tiene como espacio de estados el conjunto $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

En la definición anterior hay dos tipos de saltos diferentes unos internos y otros externos, los saltos internos afectan directamente el valor de los procesos λ_t y el proceso N_t solo cuenta saltos internos, sin embargo los saltos externos afectan a λ_t y por consiguiente aumentan la probabilidad de que N_t aumente al momento en que se da uno de estos saltos, haciendo de esta manera, más sensible el sistema.

En la figura 1.1 se muestran tres simulaciones diferentes del proceso λ_t para tres ventanas de tiempo distintas y con los parámetros dados por $(a, \lambda_0, \delta, \sigma, \beta, \alpha, \rho) = (0.9, 0.9, 1, 0.8, 1.2, 10, 0.1)$.

²En los trabajos de Dassios & Zhao se hace referencia a estos como *self-excited jumps*.

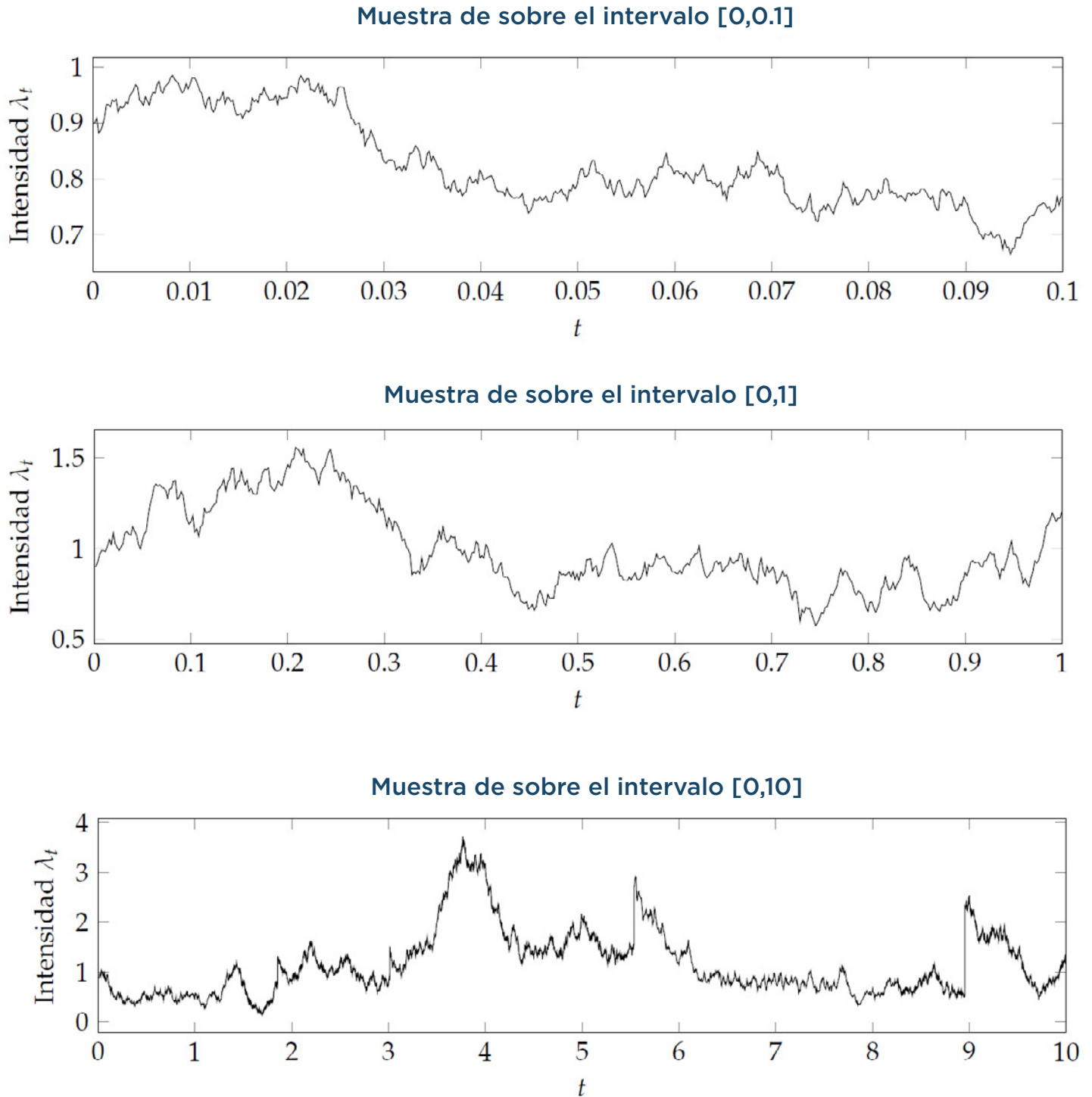


Figura 1.1: Ejemplos de simulaciones del proceso λ_t dentro de diferentes intervalos de tiempo

Fuente: Adaptación propia de Dassios et al. [2]

1.2. Generador Infinitesimal

Teniendo en cuenta la teoría de procesos de Markov deterministas a trozos y usando los resultados obtenidos por Davis en [6], el generador infinitesimal $\mathcal{A}f(\lambda, n, t)$ de un proceso de contagio dinámico (λ_t, N_t, t) actuando sobre la función $f(\lambda, n, t)$ con un dominio $\Omega(\mathcal{A})$ esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(\lambda, n, t) = & \frac{\partial f}{\partial t} - \delta(\lambda - a) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + \rho \left(\int_0^\infty f(\lambda + y, n, t) dH(y) - f(\lambda, n, t) \right) \\ & + \lambda \left(\int_0^\infty f(\lambda + y, n + 1, t) dG(y) - f(\lambda, n, t) \right) \end{aligned}$$

Donde $\Omega(\mathcal{A})$ es el dominio para el generador \mathcal{A} tal que $f(\lambda, n, t)$ es diferenciable con respecto a λ y t para todo λ, n y t , además, se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(\lambda + y, n, t) dH(y) - f(\lambda, n, t) \right| &< \infty \\ \left| \int_0^\infty f(\lambda + y, n + 1, t) dG(y) - f(\lambda, n, t) \right| &< \infty. \end{aligned}$$

Si bien es de esperar que el proceso puntual N_t sea un proceso clásico de Poisson doblemente estocástico o un proceso de Cox, en [5] se hace la claridad que esto no es así ya que N_t esta condicionado a λ_t y este último no es un proceso del tipo Poisson ya que no satisface la definición fundamental, más precisamente, para cualquier $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E} \left[\theta^{N_T - N_t} | \mathcal{F}_t \right] \neq \mathbb{E} \left[e^{-(1-\theta)(\Lambda_T - \Lambda_t)} | \mathcal{F}_t \right]$$

donde $\Lambda_t =: \int_0^t \lambda_s ds$ es el proceso de intensidad agregada.

1.3. Propiedades de Distribución

A continuación se presentan resultados desarrollados por Dassios & Zhao [5] los cuales permiten caracterizar las propiedades de la distribución del DCPD y para cada uno de los términos N_t y λ_t , las demostraciones de cada resultado presentado a continuación se encuentran en Dassios & Zhao [5], algunas se complementan o extiende en Zhao [11]. Con el fin de simplificar la expresión de los resultados, para cada tipo de magnitud de salto $Y^{(1)}$

y $Y^{(2)}$ en λ_t de (1.1), los primeros dos momentos y la transformada de Laplace para cada uno de los tipos de saltos, donde G y H son las distribuciones de probabilidad presentadas en la definición 1.1.1 asociadas a cada tipo de salto dentro del proceso λ_t .

$$\begin{aligned} \mu_{1_H} &:= \int_0^\infty y dH(y), & \mu_{2_H} &:= \int_0^\infty y^2 dH(y), & \hat{h}(u) &:= \int_0^\infty e^{-uy} dH(y), \\ \mu_{1_G} &:= \int_0^\infty y dG(y), & \mu_{2_G} &:= \int_0^\infty y^2 dG(y), & \hat{g}(u) &:= \int_0^\infty e^{-uy} dG(y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

y la constante $\kappa := \delta - \mu_{1G}$, con las condiciones necesarias para que cada uno de los momentos y transformadas en (1.2) así definidas sean finitas.

1.3.1. Transformada de Laplace Conjunta - Función Generadora de Probabilidad Conjunta de (λ_t, N_T)

Lema 1.3.1 (Dassios & Zhao [5], página 7). *Para las constantes $0 \leq \theta \leq 1, v \geq 0$ y tiempo $0 \leq t \leq T$, la transformada de Laplace conjunta condicional de la función generadora de probabilidad para los procesos λ_t y N_t esta dada por*

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{O}^{(N_T - N_t)} e^{-v\lambda_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{-(c(T) - c(t))} e^{-B(t)\lambda_t}, \quad t \in [0, T], \tag{1.3}$$

donde $B(t)$ esta determinada por la EDO no lineal

$$-B'(t) + \delta B(t) + \theta \hat{g}(B(t)) - 1 + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(t) = 0 \tag{1.4}$$

con condición de frontera $B(T) = v$; y $C(T) = c(t)$ determinado por

$$c(T) - c(t) = a\delta \int_t^T B(s) ds + \rho \int_t^T [1 - \hat{h}(B(s))] ds. \tag{1.5}$$

1.3.2. Transformada de Laplace de λ_t

Teniendo en cuenta el lema 1.3.1 es posible generar resultados en torno a las propiedades de la distribución asociada al proceso de intensidad $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$.

Teorema 1.3.1 (Dassios&Zhao [5], página 7). *Para $\kappa > 0$, La transformada condicional de Laplace de λ_T dado λ_0 en el tiempo $t = 0$ esta dada por*

$$\mathbb{E} [e^{-v\lambda_T} | \lambda_0] = \exp \left(- \int_{G_{v,1}^{-1}(T)}^v \frac{a\delta u + \rho[1 - \hat{h}(u)]}{\delta u + \hat{g}(u) - 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du \right) \times e^{-G_{v,1}^{-1}(T)\lambda_0} \tag{1.6}$$

donde

$$G_{v,1}(L) := \int_L^v \frac{du}{\delta u + \hat{g}(u) - 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}, \quad L \in (0, v]. \tag{1.7}$$

Colorario 1.3.1 (Dassios & Zhao [5], página 9). *Si $\delta > \mu_{1G}$, entonces la transformada de Laplace de la distribución asintótica de λ_T esta dada por*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{-v\lambda_t} | \lambda_0] = \hat{\Pi}(v), \tag{1.8}$$

donde

$$\hat{\Pi}(v) := \mathcal{L} \{ \Pi(v) \} = \exp \left(- \int_0^v \frac{a\delta u + \rho[1 - \hat{h}(u)]}{\delta u + \hat{g}(u) - 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du \right). \tag{1.9}$$

Π denota la distribución determinada por la transformada de Laplace en (1.9), y $\Pi(\lambda_t)$ denota la función de densidad asociada.

Colorario 1.3.2 (Dassios & Zhao [5], página 9). Para $\kappa > 0$ y cualquier tiempo $T \geq 0$, si $\lambda_0 \sim \Pi$, entonces $\lambda_T \sim \Pi$.

Teorema 1.3.2 (Dassios & Zhao [5], página 10). Para $\kappa > 0$, (1.9) es también la transformada de Laplace de la distribución estacionaria de $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$.

Los siguientes son resultados que se dan bajo suposiciones particulares para la distribución de la magnitud de cada uno de los tipos de saltos. Para la demostración de cada uno de los siguientes resultados se hace uso de (1.9).

Colorario 1.3.3 (Dassios & Zhao [5], página 11). Para el caso particular de difusión pura, es decir, sin saltos externos o internos, se tiene que

$$\{\lambda_t\}_{t \geq 0} \sim \text{Gamma} \left(\frac{2\delta}{\sigma^2} a, \frac{2\delta}{\sigma^2} \right).$$

Colorario 1.3.4 (Dassios & Zhao [5], página 13). Para el caso especial en que no hay saltos internos, suponiendo que $H \sim \text{Exp}(\alpha)$, se tiene que

$$\hat{\Pi}(v) = \left(\frac{\frac{2\delta}{\sigma^2}}{v + \frac{2\delta}{\sigma^2}} \right)^{\left(\frac{2\delta}{\sigma^2} a - \frac{2\rho}{2\delta \alpha \sigma^2} \right)} \left(\frac{\alpha}{\alpha + v} \right)^{\frac{2\rho}{2\delta - \alpha \sigma^2}}$$

Colorario 1.3.5 (Dassios & Zhao [5], página 13). Para el caso especial sin saltos externos, suponiendo que $G \sim \text{Exp}(\beta)$ y $\delta\beta > 1$, se tiene

$$\{\lambda_t\}_{t \geq 0} \sim \text{Gamma} \left(\frac{2a\delta}{\sigma^2}, -u_- \right) + \text{Gamma} \left(\frac{2a\delta}{\sigma^2} w_2, -u_+ \right),$$

Donde las constantes $w_1, w_2 > 0, u_-, u_+ < 0$,

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{u_- + \beta}{u_- - u_+}, \\ w_2 &:= -\frac{u_+ + \beta}{u_- - u_+} \\ u_{\pm} &:= \frac{-\left(\frac{2\delta}{\sigma^2} + \beta\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2\delta}{\sigma^2} - \beta\right)^2 + \frac{8}{\sigma^2}}}{2} \end{aligned}$$

Observación 1.3.1 (Dassios & Zhao [5], página 14). Para el caso especial sin difusión, cuando $\sigma^2 = 0$, suponiendo que $H \sim \text{Exp}(\alpha)$, $G \sim \text{Exp}(\beta)$ y $\delta\beta > 1$, se tiene que

$$\{\lambda_t\} \sim \begin{cases} a + \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2, & \text{para } \alpha \geq \beta, \\ a + \tilde{\Gamma}_3 + \tilde{B}, & \text{para } \alpha < \beta \text{ y } \alpha \neq \beta - \frac{1}{\delta}, \\ a + \tilde{\Gamma}_4 + \tilde{P}, & \text{para } \alpha = \beta - \frac{1}{\delta}, \end{cases}$$

Donde $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3, \tilde{\Gamma}_4$ son diferentes variables aleatorias gama; \tilde{B} sigue una distribución binomial negativa compuesta con saltos exponenciales subyacentes; \tilde{P} sigue una distribución de Poisson compuesta con saltos exponenciales subyacentes. Estas son independientes una de otra. La discusión y posterior demostración de este resultado se trata al detalle en el teorema 4.1 en Dassios & Zhao [3].

1.3.3. Función Generadora de Probabilidad de N_T

Teniendo en cuenta el lema (1.3.1) es posible derivar las propiedades distribucionales del proceso puntual $\{N_t\}_{t \geq 0}$.

Teorema 1.3.3 (Dassios & Zhao [5], página 16). Para $\kappa > 0$, la función generadora de probabilidad de N_T condicional a λ_0 y $N_0 = 0$, esta dada por

$$\begin{aligned} \phi_T(\theta) &:= \mathbb{E}[\theta^{N_T} | \lambda_0] \\ &= \exp\left(-\int_0^{G_{0,\theta}^{-1}(T)} \frac{a\delta u + \rho[1 - \hat{h}(u)]}{1 - \delta u - \theta\hat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du\right) \times e^{(-G_{0,\theta}^{-1}(T)\lambda_0)}, \end{aligned}$$

donde

$$G_{0,\theta}(L) =: \int_0^L \frac{du}{1 - \delta u - \theta\hat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (1.10)$$

Colorario 1.3.6 (Dassios & Zhao [5], página 18). Para el caso especial de una reversión a la media igual a cero y sin saltos externos, es decir, $a = \rho = 0$, se tiene que

$$\mathbb{E}[\theta^{N_T} | \lambda_0] = \exp^{-G_{0,\theta}^{-1}(T)\lambda_0}, \quad \mathbb{E}[\theta^{N_\infty} | \lambda_0] = e^{-v^* \lambda_0}$$

donde la función $G_{0,\theta}(\cdot)$ esta dada por (1.10) y v^* es la única solución positiva de la ecuación

$$1 - \delta L - \theta\hat{g}(L) - \frac{1}{2}\sigma^2 L^2 = 0.$$

1.3.4. Momentos de λ_t y N_T

Los momentos de λ_t y N_t pueden ser derivados de forma convencional por diferenciación de la transformada de Laplace en la sección 1.3.2 y la función generadora de probabilidad de N_t en la sección 1.3.3. De forma alternativa, estos pueden ser obtenidos resolviendo la EDO las cuales se pueden encontrar en las demostraciones de cada uno de estos resultados.

Teorema 1.3.4 (Dassios & Zhao [5], página 18). *El valor esperado del proceso λ_t condicionado a λ_0 esta dado por*

$$\mu_1(t; \lambda_0) := \mathbb{E} [\lambda_t | \lambda_0] = \begin{cases} \frac{\mu_{1H}\rho + a\delta}{\kappa} + \left(\lambda_0 - \frac{\mu_{1H}\rho + a\delta}{\kappa} \right) e^{-\kappa t}, & \kappa \neq 0, \\ \lambda_0 + (\mu_{1H}\rho + a\delta)t, & \kappa = 0, \end{cases}$$

Teorema 1.3.5 (Dassios & Zhao [5], página 19). *El segundo momento del proceso λ_t condicionado a λ_0 esta dado por*

$$\mu_2(t; \lambda_0) := \mathbb{E} [\lambda_t^2 | \lambda_0] = \begin{cases} \lambda_0^2 e^{-2\kappa t} + \frac{2(\mu_{1H}\rho + a\delta) + \mu_{2G} + \sigma^2}{\kappa} \left(\lambda_0 - \frac{\mu_{1H}\rho + a\delta}{\kappa} \right) (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) \\ \quad + \left[\frac{(2(\mu_{1H}\rho + a\delta) + \mu_{2G} + \sigma^2)(\mu_{1H}\rho + a\delta)}{2\kappa^2} + \frac{\mu_{2H}\rho}{2\kappa} \right] \\ \quad \times (1 - e^{-2\kappa t}), & \kappa \neq 0 \\ \lambda_0^2 + [2(\mu_{1H}\rho + a\delta) + \mu_{2G} + \sigma^2] (\lambda_0 t + \frac{1}{2}(\mu_{1H}\rho + a\delta)t^2) \\ \quad + \mu_{2H}\rho t, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Colorario 1.3.7 (Dassios & Zhao [5], página 20). *La varianza del proceso λ_t condicional a λ_0 esta dada por*

$$\text{Var} [\lambda_t | \lambda_0] = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{(\mu_{2G} + \sigma^2)(\mu_{1H}\rho + a\delta)}{\kappa} - \mu_{2H}\rho - 2(\mu_{2G} + \sigma^2)\lambda_0 \right] e^{-2\kappa t} + \frac{\mu_{2G} + \sigma^2}{\kappa} \left[\lambda_0 - \frac{\mu_{1H}\rho + a\delta}{\kappa} \right] e^{-\kappa t} \\ \quad + \frac{1}{2\kappa} \left(\mu_{2H}\rho + \frac{(\mu_{2G} + \sigma^2)(\mu_{1H}\rho + a\delta)}{\kappa} \right), & \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2}(\mu_{2G} + \sigma^2) (\mu_{1H}\rho + a\delta) t^2 + [(\mu_{2G} + \sigma^2)\lambda_0 + \mu_{2H}\rho] t, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Colorario 1.3.8 (Dassios & Zhao [5], página 20). *Asumiendo $\kappa > 0$, el primer y segundo momento asintótico del nivel de intensidad λ_t esta dado por*

$$\mu_1 := \mathbb{E}[\lambda_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\lambda_t | \lambda_0] = \frac{\mu_{1H}\rho + a\delta}{\kappa}$$

$$\mu_2 := \mathbb{E}[\lambda_t^2] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\lambda_t^2 | \lambda_0] = \frac{[2(\mu_{1H}\rho + a\delta) + \mu_{2G} + \sigma^2](\mu_{1H}\rho + a\delta)}{2\kappa^2} + \frac{\mu_{2H}\rho}{2\kappa}$$

Teorema 1.3.6 (Dassios & Zhao [5], página 20). *El valor esperado de $N_t \lambda_t$ condicional a $N_0 = 0$ y λ_0 esta dado por*

$$v_1(t; \lambda_0) := \mathbb{E}[N_t | \lambda_0] = \begin{cases} \mu_1 t + (\lambda_0 - \mu_1) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}), & \kappa \neq 0 \\ \lambda_0 t + \frac{1}{2}(\mu_{1H} \rho + a\delta)t^2, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Lema 1.3.2 (Dassios & Zhao [5], página 20). *El valor esperado de $N_t \lambda_t$ condicionado a $N_0 = 0$ y λ_0 esta dado por*

$$\vartheta(t; \lambda_0) := \mathbb{E}[N_t | \lambda_t] = e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} p(s; \lambda_0),$$

$$p(t; \lambda_0) := (\mu_{1H} \rho + a\delta)v_1(t; \lambda_0) + \mu_2(t; \lambda_0) + \mu_{1G} \mu_1(t; \lambda_0).$$

Teorema 1.3.7 (Dassios & Zhao [5], página 21). *El segundo momento de N_t condicional a $N_0 = 0$ y λ_0 esta dado por*

$$v_2(t; \lambda_0) := 2 \int_0^t \vartheta(s; \lambda_0) ds + \int_0^t \mu_1(s; \lambda_0) ds.$$

Observación 1.3.2. *Con los resultados obtenidos en los teoremas 1.3.6 y 1.3.7 es posible encontrar la varianza de N_t*

$$Var[N_t | \lambda_0] = v_2(t; \lambda_0) - v_1^2(t; \lambda_0).$$

1.4. Propiedades del proceso (Λ_t, λ_t)

En el trabajo realizado por Dassios, Jang y Zhao en [2, Apendice A] se involucra el término $\Lambda_t := \int_0^t \lambda_u du$ que junto con los resultados anteriores y la notación en (1.2), con lo cual se dan los siguientes resultados, la notación se sigue del artículo mencionado haciendo el cambio de Z_t por Λ_t .

Proposición 1.4.1 (Dassios et al. [2], página 5). *Para las constantes $v, \xi \geq 0$, se tiene la transformada de Laplace conjunta*

$$\mathbb{E} \left[e^{-v\Lambda_T} e^{-\xi\Lambda_T} | \lambda_t, \Lambda_t \right] = e^{(D(T)-D(t))} e^{-(C(t)\lambda_t)} e^{-\xi\Lambda_t}, \quad t \in [0, T]$$

donde $C(t)$ esta determinado por la ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$-C'(t) + \delta C(t) + [\hat{g}(C(t)) - 1] \frac{1}{2} \sigma^2 C^2(t) - \xi = 0,$$

Con la condición de frontera $C(T) = v$ y $D(T) - D(t)$ esta determinado por

$$D(T) - D(t) = a\delta \int_t^T C(s)ds + \rho \int_t^T \left[1 - \widehat{h}(C(s))\right] ds.$$

Teorema 1.4.1 (Dassios et al. [2], página 5). Bajo la condición $\kappa > 0$, para cualquier $v \in [0, a^+)$ y $\xi > 0$, la transformada conjunta de Laplace de λ_T, Λ_T condicionada a λ_0 esta dada por

$$\mathbb{E} \left[e^{-v\lambda_t} e^{-\xi\Lambda_t} \right] = e^{-\mathcal{G}_{v,\xi}^{-1}(T)\lambda_0} \times \exp \left(- \int_v^{\mathcal{G}_{v,\xi}^{-1}(T)} \frac{a\delta u + \rho \left[1 - \widehat{h}(u)\right]}{1 + \xi - \delta u - \widehat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du \right)$$

donde

$$\mathcal{G}_{v,\xi}(A) := \int_v^A \frac{1}{1 + \xi - \delta u - \widehat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du, \quad A \in [v, a^+)$$

y a^+ es la única solución positiva a la ecuación $1 + \xi - \delta u - \widehat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 = 0$.

Colorario 1.4.1 (Dassios et al. [2], página 7). La transformada de Laplace del proceso de intensidad agregada Λ_T condicionada a λ_0 esta dado por

$$\mathbb{E} \left[e^{-\xi\Lambda_t} | \lambda_0 \right] = e^{-\mathcal{G}_{0,\xi}^{-1}(T)\lambda_0} \times \exp \left(- \int_0^{\mathcal{G}_{0,\xi}^{-1}(T)} \frac{a\delta u + \rho \left[1 - \widehat{h}\right]}{1 + \xi - \delta u - \widehat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du \right) \quad (1.11)$$

donde

$$\mathcal{G}_{0,\xi}(A) := \int_0^A \frac{1}{1 + \xi - \delta u - \widehat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du, \quad A \in [0, a^+). \quad (1.12)$$

Observación 1.4.1. Al tomar $v = 1$ y $\xi = 0$ en el teorema 1.4.1 se obtiene el teorema 1.3.1.

Observación 1.4.2. El precio de un bono en el tiempo $t = 0$ asociado a una tasa de interés instantánea estocástica r_t con madurez T como

$$B(0, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \middle| r_0 \right],$$

teniendo en cuenta el colorario 1.4.1, tomando $\lambda_t \equiv r_t$ y $\xi = 1$, la ecuación (1.11) define el precio de un bono asociado a λt como

$$\begin{aligned}
 B(0, T) &= \mathbb{E} \left[e^{-\Lambda_T} | r_0 \right] \\
 &= e^{-\mathcal{G}_{0,1}^{-1}(T)\lambda_0} \times \exp \left(- \int_0^{\mathcal{G}_{0,1}^{-1}(T)} \frac{a\delta u + \rho \left[1 - \hat{h} \right]}{2 - \delta u - \hat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du \right) \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

donde (1.12) queda reescrita de la siguiente manera

$$\mathcal{G}_{0,1}(A) := \int_0^A \frac{1}{2 - \delta u - \hat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du, \quad A \in [0, a^+). \tag{1.14}$$

El término a^+ es la única solución positiva de la ecuación problema

$$2 - \delta u - \hat{g}(u) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 = 0$$

Teniendo en cuenta que $\hat{g}(u) = \mathbb{E} [e^{-uY}]$, donde Y es la variable aleatoria y si se toma el término de la izquierda en la igualdad anterior como una función que depende de u , entonces sin importar la distribución de probabilidad asociada a Y siempre se tiene que $f(0) = 1$, haciendo que dicho término represente una función decreciente positiva en el intervalo $[0, a^+)$. El valor que puede tomar a^+ depende del comportamiento de la función $\hat{g}(u)$ y el valor que tome σ . Ya que la función $\hat{g}(u)$ depende únicamente del comportamiento de los saltos internos, los cuales para intereses de este trabajo se corresponden con una variable aleatoria de tipo exponencial con parámetro β . Bajo este escenario, se encuentra una relación inversa entre σ y a^+ la cual es posible evidenciar en la figura 1.2 la cual muestra el comportamiento de la función $f(u)$ dentro del intervalo $[0, a^+)$ para diferentes valores de σ asumiendo que los saltos internos del proceso de intensidad λ_t se corresponden con una variable aleatoria exponencial con parámetro $\beta = 50$, además, la tabla 1.1 muestra los valores escogidos para σ junto al respectivo valor aproximado de a^+ que se puede encontrar bajo las condiciones dadas.

σ	a^+
0.0010	27.0068
0.0100	26.1889
0.1000	11.1718
0.3000	4.3759
0.5000	2.7070
1	1.3840

Tabla 1.1: Valores de σ junto a sus correspondientes aproximaciones para a^+

Observación 1.4.3. En la observación anterior se realizó una breve descripción de la relación que hay entre los términos σ y a^+ bajo la suposición de que los saltos internos del proceso λ , siguen una distribución de tipo exponencial con parámetro $\beta = 50$, la ecuación (1.14) muestra que el comportamiento de la función $G_{0,1}(A)$ depende del valor que tome a^+ ya que esta función resulta ser positiva, monótona creciente y sobreyectiva sobre el intervalo $[0, a^+)$ garantizando así la existencia

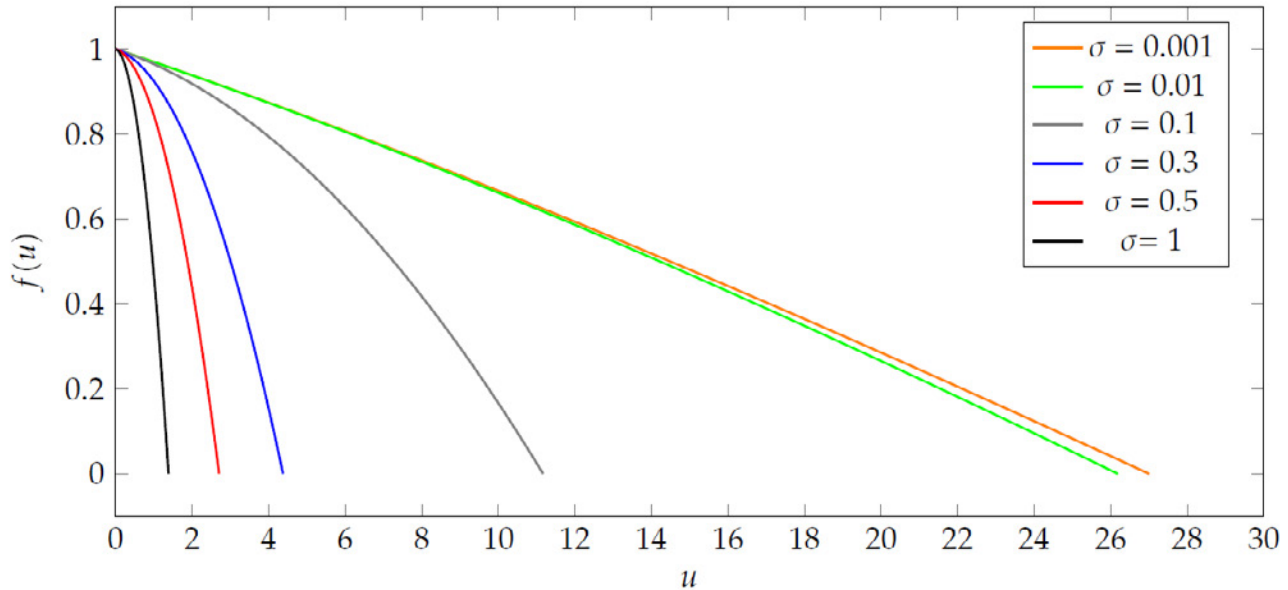


Figura 1.2: Gráficos de $f(u)$ en el intervalo $[0, a^+)$ para diferentes valores de σ
Fuente: Creación propia

de una función inversa $G_{0,1}^{-1}(T)$ la cual se utiliza en la función de valoración del bono en la ecuación (1.13).

Con lo anterior es posible concluir que $G_{0,1}^{-1}(T)$ es una función definida sobre el intervalo $[0, G_{0,1}(a^+))$, que resulta ser importante al momento de implementar la ecuación (1.13) para realizar la valoración de un bono, ya que el tiempo de madurez T que se defina para realizar la valoración del bono se debe encontrar dentro del intervalo ya mencionado, esto implica que la elección de σ también afecta la ventana de tiempo sobre la cual es posible realizar la valoración del bono, es así que la fórmula no debe ser implementada para aquellos periodos de madurez $T \geq a^+$ ya que sobre estos valores no es posible encontrar un valor de $G_{0,1}^{-1}(T)$. La tabla 1.2 muestra la relación que hay entre algunos valores de σ y una aproximación del máximo valor que puede tomar T al momento de utilizar la ecuación 1.13 para valorar un bono, con la ayuda de esta tabla y teniendo en cuenta la relación ya mencionada entre σ y a^+ se puede deducir que bajo las condiciones establecidas para los saltos internos, existe un conjunto de valores que puede abarcar la mayoría de periodos de madurez que son comunes en el mercado de bonos, pero así mismo hay valores de σ para los cuales la fórmula de valoración escasamente podría cubrir bonos de corto y mediano plazo.

1.5. Simulación de los saltos del proceso λ_T

Esta sección reúne los resultados teóricos presentados en Dassios y Zhao [4] los cuales son necesarios para construir un algoritmo el cual proporciona una simulación exacta para el

σ	a^+	Valor máximo para T (años)
0.0010	27.0068	890.3672
0.1000	11.1718	250.8939
0.5000	2.7070	53.1429
1	1.3840	26.3113
2	0.6996	13.3877
5	0.2816	5.3852
10	0.1411	2.6704

Tabla 1.2: Valores de σ junto a sus correspondientes aproximaciones para a^+ y para valor máximo de T .

proceso λ_t . En el artículo que se menciona, los autores abordan la construcción del algoritmo teniendo en cuenta únicamente los saltos de tipo interno dando como resultado el algoritmo 3.6 en la pagina 8. Ya que nuestro interés recae sobre el modelo DCPD con ambos tipos de saltos, utilizaremos el algoritmo 5.1 de la pagina 18.

Proposición 1.5.1 (Dassios et al. [4], página 4). *Condicional a el i -ésimo salto en el tiempo T_i^* y el nivel de intensidad $\lambda_{T_i^*}$, es posible caracterizar la distribución conjunta de $(\lambda_{T_i^*+s^-}, \Lambda_{T_i^*+s} - \Lambda_{T_i^*})$ a través de una transformación integral especial del proceso CIR (sin saltos) iniciando en T_i^* , es decir,*

$$\mathbb{E} \left[e^{-\nu \lambda_{T_i^*+s^-}} e^{\left(\Lambda_{T_i^*+s} - \Lambda_{T_i^*}\right)} \middle| \lambda_{T_i^*+s^-} \right] = \left(\frac{A_s}{B_s \nu + C_s} \right)^D \exp \left(-\frac{E_s \nu + F_s}{B_s \nu + C_s} \lambda_{T_i^*} \right), \quad s \in [0, S_{i+1}^*),$$

donde

$$\kappa = \sqrt{\delta + 2\sigma^2}, \quad D = \frac{2a\delta}{\sigma^2}, \tag{1.15}$$

$$A_s = 2\kappa e^{((\kappa+\delta)/2)s}, \quad B_s = \sigma (e^{\kappa s} - 1),$$

$$C_s = (\kappa - \delta) + (\kappa + \delta)e^{\kappa s}, \tag{1.16}$$

$$E_s = (\kappa + \delta) + (\kappa - \delta)e^{\kappa s}, \quad F_s = 2(e^{\kappa s} - 1).$$

Lema 1.5.1 (Dassios et al. [4], página 5). *La variable aleatoria S definida por la distribución de cola*

$$Pr [S^* > s] = \left[\frac{2\kappa e^{((\kappa+\delta)/2)s}}{(\kappa + \delta) (e^{\kappa s} - 1) + 2\kappa} \right]^{2a\delta/\sigma^2}$$

puede ser exactamente simulado por un esquema aceptación/rechazo modificado (o transformado) como se muestra a continuación:

1. Se genera una realización de una variable aleatoria Pareto W_g vía

$$W_g = \frac{2\kappa}{\kappa + \delta} \left[U_1^{-\sigma^2/(a\delta\kappa(\kappa-\delta))} - 1 \right], \quad U_1 \sim \mathcal{U}[0, 1]; \quad (1.17)$$

2. Genera una variable aleatoria distribuida uniformemente $U_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$;

3. Si

$$U_2 \leq \left(\frac{\kappa + \delta}{2\kappa} \right)^{((\kappa+\delta)/2\kappa)2a\delta/\sigma^2} \left(\frac{W_g + 1}{2\kappa/(\kappa + \delta) + W_g} \right)^{a\delta(\kappa+\delta)/\sigma^2\kappa} \frac{W_g}{W_g + 1},$$

entonces se acepta la condición y se define

$$S^* = \frac{1}{\kappa} \ln(W_g + 1);$$

4. En otro caso, se rechaza y se repite el paso 1.

Teorema 1.5.1 (Dassios et al. [4], página 5). Condicionado a la intensidad inicial $\lambda_{T_i^*}$, la siguiente iteración del tiempo S_{i+1}^* puede ser exactamente simulada vía

$$S_{i+1}^* \stackrel{\mathcal{D}}{=} \begin{cases} \min\{S^*, V_{i+1}^*\}, & d_{i+1} > 0, \\ S^*, & d_{i+1} < 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

donde, $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ denota igualdad en distribución entre ambos términos, además

d_{i+1} es simulado vía

$$d_i := \frac{1 + (\ln U_3 / (2\lambda_{T_i^*}))(\kappa + \delta)}{1 - (\ln U_3 / (2\lambda_{T_i^*}))(\kappa - \delta)}, \quad U_3 \sim \mathcal{U}[0, 1];$$

S^* es exactamente simulada por el lema 1.5.1.

V_{i+1}^* es una variable aleatoria defectuosa con $Pr[V_{i+1}^*] = \exp(-(2/(\delta + \kappa))\lambda_{T_i^*})$, esta se simula exactamente vía

$$V_{i+1}^* \stackrel{\mathcal{D}}{=} -\frac{1}{\kappa} \ln d_{i+1}.$$

Teorema 1.5.2 (Dassios et al. [4], página 7). Condicionales al nivel de intensidad $\lambda_{T_i^*}$ y la realización del intervalo de tiempo S_{i+1}^* , se tiene la descomposición distribucional

$$\lambda_{T_i^*+s^-} \stackrel{D}{=} \begin{cases} \text{Gamma} \left(J_s^* + D + 1, \frac{C_s}{B_s} \right), & \text{con probabilidad } w_{1s}, \\ \text{Gamma} \left(J_s^* + D + 2, \frac{C_s}{B_s} \right), & \text{con probabilidad } w_{2s}, \end{cases}$$

donde

$$J_s^* \sim \text{Poisson} \left(\lambda_{T_i^*} \left(\frac{E_s}{B_s} - \frac{F_s}{C_s} \right) \right), \tag{1.19}$$

$$w_{1s} = \frac{DB_s}{DB_s + \lambda_{T_i^*} (E_s - F_s(B_s/C_s))},$$

$$w_{2s} = \frac{\lambda_{T_i^*} (E_s - F_s(B_s/C_s))}{DB_s + \lambda_{T_i^*} (E_s - F_s(B_s/C_s))}, \tag{1.20}$$

y B_s, C_s, D, E_s, F_s son especificadas en (1.15) y (1.16).

A continuación se presenta un algoritmo el cual aborda la simulación del proceso λ_t en (1.1), siguiendo las condiciones y notación de la definición 1.1.1, en cuanto a la notación, esta difiere de la presentada por Dassios et al. [4] para los tipos de saltos.

Algoritmo de simulación para λ_t , esquema exacto (Dassios et al. [4], página 7):

Condicionado a (λ_t, T_n) donde T_n es el n -ésimo tiempo de salto en la intensidad λ_t (este puede ser un salto de tipo interno o externo), es posible simular (λ_{t+1}, T_{n+1}) a través de los siguientes pasos:

(a) Se simula el $n + 1$ intervalo de tiempo

$$s = \min \left\{ S_{n+1}^*, E_{n+1}^* \right\}$$

donde el intervalo de tiempo para el $n+1$ salto interno es simulado a través de la ecuación (1.18) y E_{n+1}^* el intervalo de tiempo que corresponde al salto externo $n + 1$ el cual sigue una distribución exponencial de parámetro ρ , es decir, $E_{n+1}^* \sim \text{Exp}(\rho)$, el cual se simula a través de

$$E_{n+1}^* \stackrel{D}{=} -\frac{1}{\rho} \ln U \tag{1.21}$$

donde $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

(b) Se define el tiempo del salto $n + 1$ como T_{n+1} dado por

$$T_{n+1} = T_n + s.$$

(c) Se simula la variable aleatoria de Poisson $J_s^* = j$ a través de (1.19).

(d) Condicionado a s y j , se simula $\lambda_{T_{i+1}^*}$ como una mezcla de dos variables aleatorias $\text{Gamma}(j + D + 1, C_s/B_s)$ $\text{Gamma}(j + D + 2, C_s/B_s)$ con pesos w_{1s} y w_{2s} como en (1.20).

(e) Se agrega un salto al proceso de intensidad en el tiempo de salto como

$$\lambda_{T_{n+1}} = \begin{cases} \lambda_{T_{n+1}^-} + Y_{n+1}^{(2)}, & \text{si } \min\{S_{n+1}^*, E_{n+1}^*\} = S_{n+1}^*, \\ \lambda_{T_{n+1}^-} + Y_{n+1}^{(1)}, & \text{si } \min\{S_{n+1}^*, E_{n+1}^*\} = E_{n+1}^*. \end{cases} \quad (1.22)$$

(f) Se realiza el cambio del proceso puntual en el tiempo de salto como

$$N_{t_{i+1}} = \begin{cases} N_{T_{n+1}^-} + 1, & \text{si } \min\{S_{n+1}^*, E_{n+1}^*\} = S_{n+1}^*, \\ N_{T_{n+1}^-}, & \text{si } \min\{S_{n+1}^*, E_{n+1}^*\} = E_{n+1}^*. \end{cases}$$

2. Bonos

Cuando una persona, grupo de personas o institución está interesada en participar de las dinámicas que se dan dentro de los diferentes mercados financieros se encuentran con una gran variedad de activos los cuales les permiten invertir su dinero en busca del cumplimiento de un objetivo financiero concreto como el crecimiento de capital, la inversión en activos líquidos o la búsqueda de financiación. En el mercado se ofrecen una gran variedad de productos los cuales permiten identificar dos tipos de mercados diferentes, el mercado de renta variable y el de renta fija; en el mercado de renta variable se negocian instrumentos para los cuales el flujo de dinero solo se conoce hasta el momento de su respectivo pago durante las fechas pactadas dentro del contrato, haciendo posible que el poseedor del instrumento registre pérdidas. Caso contrario a los productos del mercado de renta fija donde las partes involucradas en la negociación del contrato conocen y pactan desde el principio todas las características de los flujos futuros de dinero generados por el instrumento que se está negociando y aunque existen casos en los cuales el valor para cada flujo de dinero solo se conocen hasta la fecha de pago, el tenedor del contrato sabe que estos flujos están a su favor, siempre que el emisor cumpla con los compromisos adquiridos.

Si bien, cualquier contrato en alguno de los mercados anteriormente mencionados tiene implícitos distintos tipos de riesgos, la mayoría de los contratos dentro del mercado de renta fija son considerados libres de riesgo, esto se debe a la posibilidad de pactar las características y condiciones que fijan el comportamiento de los flujos futuros de dinero al momento de la negociación, también por las características de quienes responden por estos flujos de dinero; ya que generalmente la regulación propia de los mercados en donde se negocian estos instrumentos, obligan al emisor del contrato a tener una reserva o algún tipo de respaldo que garantice los flujos futuros de dinero especificados durante la negociación. En algunos instrumentos como la cuenta bancaria o los títulos de deuda emitidos por algunos gobiernos, las características mencionadas mitigan los riesgos sobre el contrato al punto de que los diferentes actores involucrados en este tipo de mercados los consideran casi inexistentes al momento de la negociación.

2.1. Títulos de Deuda

Dentro del mercado de renta fija se encuentran los títulos de deuda, en el contrato asociado a este tipo de instrumento hay un emisor o deudor el cual recibe dinero de un inversionista o acreedor, a cambio, el emisor debe responder por unos flujos futuros de dinero que incluyen los intereses y el valor de la deuda negociados por ambas partes en el contrato, dentro de unas fechas periódicas pactadas en el mismo. Según lo negociado en el contrato de un instrumento como este tipo, la deuda puede que sea liquidada con un único pago, una serie de pagos periódicos o un esquema de amortización, en cualquiera de estos casos los pagos son responsabilidad del emisor y deben responder a los intereses y el valor adeudado al acreedor.

Dentro de los diferentes tipos de instrumentos considerados como títulos de deuda se encuentran los bonos, estos son instrumentos de renta fija los cuales son utilizados por diferentes tipos de instituciones con la intención de encontrar liquidez, diversificar sus portafolios o financiar sus operaciones y proyectos futuros. Las características del bono depende de quien sea el emisor, este puede ser un ente gubernamental o corporativo el cual puede ser extranjero o doméstico, según el mercado donde se esté negociando el instrumento. Los bonos son instrumentos que gozan de gran liquidez y constituyen un mercado muy apetecido por inversionistas con baja tolerancia al riesgo o con ánimo de diversificar sus inversiones.

2.2. Características

Los bonos tienen características las cuales permiten que tanto el emisor y el inversionista puedan determinar el comportamiento que tendrán los flujos de dinero generados por este instrumento, a continuación se mencionan algunas de ellas. El contenido de esta sección sigue el hilo conductor e ideas de los primeros capítulos en Fabozzi [8].

- **Término o madurez:** Es la cantidad de tiempo en años con la cual el emisor se compromete con sus obligaciones hacia el tenedor del contrato, esta madurez hace referencia a una fecha concreta en la cual se da el último o único flujo de dinero negociado entre las partes. Según el mercado en que se da la negociación, un bono de corto plazo es aquel que tiene una madurez superior a 30 días y máximo de 5 años, los de mediano plazo son bonos con madurez superior a cinco años pero inferior a doce años y los bonos de largo plazo con una madurez mayor de 12 años.

En el caso colombiano los bonos de corto plazo son aquellos que tienen una madurez superior a 30 días pero menor o igual a un año, siendo los TES clase B los más relevantes, al ser emitidos por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público y administrados por el Banco de la República.

- **Principal:** El principal hace referencia al valor que el emisor se compromete a devolver llegada la fecha de madurez del bono, también hace referencia a él como valor nominal, valor de redención o valor facial (*face value*).
- **Tasa de descuento:** Es la tasa de interés con la cual se realiza el descuento de todos los flujos futuros de dinero pactados dentro del contrato del bono.
- **Precio sucio:** Es el valor presente de una unidad monetaria descontado con una tasa de interés, ya que dicha tasa es positiva el precio sucio se expresa como un porcentaje menor de 100 %.
- **Tasa cupón:** Hace referencia a una tasa de interés que el emisor se compromete a pagar de forma periódica durante el periodo que el contrato este activo, es decir, el emisor paga de forma periódica un monto igual al valor facial multiplicado por esta tasa cupón hasta la madurez del bono. Esta tasa no debe confundirse con la tasa de descuento ya que esta se utiliza para encontrar el precio sucio del instrumento teniendo en cuenta cada uno de los flujos de dinero. Para que un bono pague cupones este debe tener una duración mayor a un año y como mínimo se realizan dos pagos semestrales, esta frecuencia puede variar según las condiciones de negociación. El bono que no paga cupones recibe el nombre de bono cupón-cero (*zero-coupon bond*).

La emisión del bono se realiza dentro del mercado primario, por lo general a través de una subasta holandesa, en la cual se parte de un valor máximo para la tasa efectiva de corte, el valor se va reduciendo hasta que alguno de los participantes decida aceptar la oferta, el Banco de la República también establece una tasa mínima efectiva. En Colombia existe un programa que regula y certifica a las instituciones financieras que pueden colocar a la venta este tipo de instrumentos. Cuando el bono paga cupones estos pueden ser comercializados dentro del mercado secundario de forma individual, como si fueran un bono cero cupón cuya madurez se da en la fecha de liquidación del cupón establecida dentro del contrato original, algo similar sucede con el principal dentro de un bono con cupones.

2.3. Riesgos Asociados a un Bono

Si bien en muchas ocasiones los bonos son considerados instrumentos de renta fija libres de riesgo, un ejemplo de esto son los bonos emitidos por el tesoro de Estados Unidos que se consideran totalmente libres de riesgo, esto no es del todo cierto ya que hay algunos factores dentro del manejo de los flujos de dinero y características de las partes involucradas que pueden aumentar el riesgo implícito en estos instrumentos, se hace referencia a algunos de ellos a continuación:

- **Riesgo de tasa de interés:** Cuando un bono paga cupones, estos pueden estar indexados a una tasa de tipo variable, así que los cambios de dicha tasa se verán reflejados sobre el precio del bono y de cada cupón que no se ha pagado ya que un aumento de la tasa implica una disminución de los precios y viceversa.
- **Riesgo de inflación:** Se da cuando el poder adquisitivo de los flujos de dinero generados por el bono se ve depreciado debido a la inflación, por ejemplo, si un bono fue negociado con una tasa cupón del 4% y la inflación fue del 5% el poder adquisitivo de este cupón se ha depreciado. En Colombia esto puede suceder con bonos indexados al índice de precios al consumidor (IPC) o en unidades de valor real (UVR).
- **Riesgo cambiario:** Este riesgo se da cuando los flujos de dinero generados durante la vigencia del bono están indexados a una moneda foránea al país del emisor, por ejemplo, si desde la perspectiva del peso colombiano se compra un bono con flujos de dinero en dólares, si el dólar se deprecia respecto al peso colombiano entonces se recibiría una cantidad menor de pesos colombianos. Este tipo de riesgo es también conocido como riesgo de moneda (currency risk).
- **Riesgo de liquidez:** Afecta directamente al emisor del bono ya que hace referencia a la facilidad con que un bono puede venderse a su valor o cerca de él. Una medida de dicho riesgo es la diferencia entre el valor del precio de compra y el precio de venta.

2.4. Precio de un Bono

El bono como instrumento financiero es un contrato el cual se pacta en el tiempo t y tiene efecto hasta la fecha de madurez T ($t < T$), los números t y T son representaciones de fechas y dependen de la convención acordada por las partes involucradas para llevar el conteo de los días, el precio que el emisor asigne al bono debe ser conocido en el tiempo $t < T$, dicho precio es notado como $P(t, T)$. La idea fundamental de un bono es pagar una unidad de dinero en el tiempo T como compensación del precio $P(t, T)$ pagado por el contrato en el tiempo t , razón por la cual se describe al bono como un descuento o valor presente en el tiempo t de un pago de una unidad monetaria en el tiempo T .

De lo anterior se tiene que $P(T, T) = 1$ para todo tiempo T , además, siempre que t sea una fecha presente o ya observada la función $T \rightarrow P(t, T)$ es determinista y diferenciable respecto a T , esto quiere decir que es posible determinar el precio para cualquier madurez T con la información vigente en el tiempo t , este tipo de función es conocida como estructura a termino (*term-structure*) o curva cero cupón (*zero-bond curve*), dicha curva suele ser decreciente ajustándose a la idea de que el poder adquisitivo del dinero se reduce con el paso del tiempo. Para un tiempo T , la función $t \rightarrow P(t, T)$ es una variable aleatoria, esto se deba a que los valores de r_t no son conocidos sino hasta llegado el tiempo t .

Si la tasa de descuento r_t con la cual se negocia el bono es constante o determinista respecto a t , el precio t se calcula considerando un pago continuo de los intereses, por lo que el precio del bono se calcula con la fórmula

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r_u du \right).$$

Esto implica que si r_t es determinista, $P(t, T)$ es determinista para cualquier par (t, T) .

En general, la tasa r_t no se conoce sino hasta el tiempo t , de hecho el precio de los bonos es el dato que se observa en el mercado y en donde se encuentra implícita la tasa r_t , es decir, para un tiempo t y una madurez T se tiene el precio $P(t, T)$ es posible recuperar el valor r_t implícito en dicho precio, en este caso $r(t)$ se define como una tasa spot continuamente compuesta.

Definición 2.4.1. La tasa spot continuamente compuesta $R(t, T)$ es una tasa de interés constante la cual tiene validez para el tiempo t a la madurez T y hace que la inversión de $P(t, T)$ unidades de dinero en el tiempo t crezca continuamente hasta llegar a una unidad de dinero en la madurez T , la tasa spot puede ser calculada como

$$R(t, T) := - \frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$$

Donde $\tau(t, T) = T - t$ y hace referencia a la cantidad de tiempo restante para la madurez del bono.

Ya que $P(t, T)$ es una variable aleatoria respecto a t para un T fijo entonces la r_t implícita en este precio es también una variable aleatoria, como cada tiempo t talque $0 < t < T$ se puede asociar a una nueva variable aleatoria r_t terminada siendo un proceso estocástico. Esta tasa r_t es comúnmente conocida como tasa corta o tasa corta instantánea, la cual se puede definir como

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T)$$

teniendo en cuenta la definición de $R(t, T)$ lo anterior es equivalente a

$$r_t = \frac{\partial P(t, T)}{\partial t}.$$

El comportamiento estocástico de $P(t, T)$ es heredado por r_t y en la práctica es más sencillo intentar modelar el comportamiento de la tasa de interés que el correspondiente precio del bono, lo que ha motivado la creación de diferentes modelos estocásticos, los cuales buscan capturar el comportamiento de la tasa r_t a futuro y así obtener una aproximación del precio de los bonos con la información en t y fechas anteriores. Muchos de los modelos propuestos para r_t satisfacen la suposición básica de que $r_t > 0$ para cualquier t , en los últimos años han aparecido nuevos modelos que extienden los ya existentes para así considerar la posibilidad de tasas de interés negativas, debido a la observación de las mismas en la emisión de bonos soberanos. Pero estos modelos aun son incapaces de reflejar los saltos abruptos que puede tener una tasa de interés cualquiera, por ejemplo, los provocados por un cambio en la política monetaria de un emisor a causa del aumento o disminución de alguna materia prima, una situación de salud pública a gran escala o un cambio de gobierno local o internacional y en general cualquier choque externo que afecte el volumen de moneda circulante en el mercado, por tal razón se hace necesario contar con modelos más generales que permitan capturar esos choques estocásticos y que además capturen la vulnerabilidad del mercado que se enfrenta a los mismos. En el caso del modelo de contagio dinámico sólo se pueden estudiar saltos positivos, lo cual bajo algunos escenarios puede ser un limitante dentro de la adecuación del modelo.

3. Proceso de Automatización

Este capítulo tiene como objetivo exponer el proceso de automatización desarrollado para la implementación del modelo de contagio dinámico con difusión (CDPD) en el caso de estudio del próximo capítulo donde se tendrá en cuenta datos del Banco de la República sobre el mercado de bonos en Colombia, la idea de este proceso es generar unos códigos los cuales sean acordes a los resultados teóricos escogidos para el tratamiento del caso de estudio. Cada una de las secciones que componen este capítulo describe un paso en el proceso utilizados en la obtención de resultados. Los archivos con los códigos referenciados en esta sección se encuentran en un repositorio de github cuyo enlace se proporciona como anexo a este documento.

Para el procesamiento de los código se utilizó un procesador Intel Core i5-7200U 2.5GHz, con 16GB de RAM y un sistema operativo Windows 10 pro; se escogió MATLAB como el software para la creación de los códigos implementados en este trabajo, ya que este software enfoca los procesos de optimización en torno a la minimización, lo cual resulta conveniente para algunos de los problemas que plantea la implementación de los resultados teóricos.

3.1. Simulación del proceso λ_t

Para construir una trayectoria del proceso λ_t como se describe en la ecuación (1.1) es necesario conocer los tiempos donde se da alguno de los saltos, además de los valores que puede tomar cada uno de los saltos tanto internos y externos. Para tal fin se hace uso de los resultados teóricos mostrados en la sección 1.5 donde se mostró el proceso teórico con el que se construye la simulación de los saltos internos y externos.

En el archivo `simulacion_algoritmo_51.m` se recopila el código utilizado para la implementación del algoritmo 5.1 descrito en Dassios y Zhao [4], este código sigue con rigor el paso a paso propuesto por los autores, razón por la cual inicia con la definición del conjunto de ecuaciones en (1.15) y (1.16) estas funciones dependen de S y se utilizan durante todo el proceso de simulación. A partir de este momento se define el conjunto de parámetros $(a, \lambda_0, \delta, \sigma, \beta, \alpha, \rho)$ del proceso teniendo en cuenta que λ_0 será la tasa de interés con la que inicia la serie de tiempo que se desea observar. Para la ventana de tiempo sobre la cual se generan los valores de λ_t , la simulación considera una ventana de tiempo del tipo $[0, T]$ donde T se definió como el producto de dos parámetros llamados **maturity** y **anual**, en la práctica la variable anual siempre fue 1 y la variable **maturity** depende de la longitud de la cantidad de observaciones para cada uno de los trimestres que se analizaran posteriormente. A continuación, se describe el proceso seguido por el algoritmo para obtener tanto el valor del salto como el tiempo en el cual se da dicho salto, el algoritmo se detendrá al obtener un valor de tiempo que sea mayor o igual a T .

Para empezar, el algoritmo ejecuta la simulación de S a través del lema 1.5.1 y la simulación del valor E a través de la ecuación (1.21) con los cuales se definirá si el salto simulado es un salto de tipo interno (S) o de tipo externo (E), luego de obtener estos resultados se construye el valor s como

$$s = \min\{S, E\}$$

Si este es el primer paso del algoritmo entonces s genera a $T_1 = T_0 + s$, haciendo entender que el salto del primer paso (sea interno o externo) se da en el tiempo $T_0 + s$, en caso de ser este el n -ésimo s generado por el algoritmo entonces se estaría diciendo que el salto $n + 1$ se da en el tiempo $T_{n+1} = T_n + s$ sin saber aun si el salto en cuestión es interno o externo.

Luego de obtenido el tiempo donde se da el salto que se va a simular, se pasa a generar una variable aleatoria de Poisson J_S^* según la ecuación (1.19), con este valor se simula el término $\lambda_{T_{n+1}^*}$ según las condiciones establecidas por el teorema 1.5.2, este término sirve como referencia para el salto resultante de la simulación, es decir, este valor es una aproximación del comportamiento que lleva la trayectoria del proceso λ_t justo antes de que se de el salto dentro del proceso.

Tomando el término $\lambda_{T_{n+1}^*}$ se pasa a simular el valor de λ_{n+1} utilizando la distribución que corresponde a cada uno de los saltos, dentro del contexto de este trabajo supondremos que los saltos siguen una distribución exponencial de parámetro α si son internos y β si son externos, el valor que se agregara con cada una de estas distribuciones se genera teniendo en cuenta la función de percentiles asociada a la distribución exponencial. Dependiendo cual de los términos E o S determina el valor de s , será la distribución de los saltos internos o la de los externos la que se debe utilizar para simular el valor que determina la simulación de λ_t como lo indica la ecuación (1.22).

Para finalizar el algoritmo construye el siguiente término del proceso N_t , para el cual se tiene que $N_{n+1} = N_n + 1$ si el salto simulado fue un salto interno o en términos del algoritmo si $s = S$, este hecho puede ser extendido a la construcción del proceso M_t haciendo $M_{k+1} = M_k + 1$ si el n -ésimo salto simulado es externo o lo que es igual a decir que $s = E$. Hasta aquí llega la ejecución del algoritmo de simulación para los saltos del proceso λ_t , este proceso se encuentra en las líneas 1 a la 171 dentro del código mencionado anteriormente.

Con los valores obtenidos para los saltos del proceso λ_t se simulan los demás valores de λ_t a través de la ecuación (1.1), este proceso también se encuentra en el código **simulacion_algoritmo_51.m** entre las líneas 173 a 211, en esta secuencia de pasos se toma la ventana de tiempo definida por el parámetro T y se divide según los tiempos en que se dan los saltos, los subintervalos obtenidos al realizar dicha división se particionan de manera uniforme para generar los valores de λ_t de tal manera que en cada subintervalo halla un total de 500 puntos por subintervalo, contando los límites superior e inferior; para optimizar los cálculos se realiza la simulación de los valores del proceso W_s que corresponde a un movimiento Browniano sobre cada uno de los puntos definidos sobre la ventana de tiempo, con los valores simulados se determina el dW_s que sería el diferencial del movimiento Browniano sobre el intervalo $[s_j, s_{j+1}]$, el diferencial está dado por

$$dW_s = W_{s_{j+1}} - W_{s_j}$$

donde $W_{s_{j+1}} - W_{s_j} \sim \text{Normal}(0, s_{j+1} - s_j)$ teniendo en cuenta que $s_0 = 0$ y por tanto $W_{s_0} = 0$.

Una vez obtenidos los valores de dW_s , que términos en un sentido riguroso sería un cálculo de los posibles valores ΔW_s ; se pasa a programar una versión aproximada de la ecuación (1.1) en la cual la integral se trata de forma discreta con los valores aproximados de ΔW_s . Con los resultados de este proceso se calcula un posible valor de λ_t sobre alguno de los t resultado de la división que se realizó sobre la ventana de tiempo $[0, T]$.

Este algoritmo, así como otras funciones que se utilizan reiteradamente en varios de los procesos programados, aparecen dentro de los códigos en forma de funciones, esto con el fin de que cada uno de los códigos sea autocontenido y su ejecución no depende de archivos externos diferentes a los datos de referencia que puedan ser utilizados.

3.2. Simulación Teorema 1.3.1 y el Corolario 1.4.1

Los resultados teóricos a los que hace referencia el título de esta sección ofrecen la posibilidad de implementar dos enfoques comunes al momento de realizar la valoración de un bono, el primero permite realizar la valoración como si λ_t determinara la fuerza de interés en el tiempo t que será vigente para un bono valorado en el tiempo t con una madurez T y el segundo permite tomar el proceso λ_t como si fuera una tasa de interés estocástica continuamente compuesta.

En el primer caso se calcula el valor esperado del termino $e^{-v\lambda T}$ condicionado a λ_0 como lo muestra la ecuación (1.6), para el calculo de las integrales en el Teorema 1.3.1 se opto por realizar el calculo numérico utilizando el comando integral nativo de MATLAB sobre el intervalo correspondiente a cada caso. Dentro de este trabajo se utilizara (1.3.1) para encontrar el valor de un bono con madurez T en $t=0$ por lo que se hace necesario tomar $v = 1$, por otro lado, para encontrar el valor esperado en cuestión primero se debe resolver para L la siguiente ecuación

$$\mathcal{G}_{1,1}(L) = T$$

bajo la condición de que $L \in (0, v]$.

Como MATLAB no cuenta con una función nativa la cual invierta de manera directa una función como $\mathcal{G}_{1,1}(L)$, bajo estas circunstancias se decidió utilizar el comando de optimización fminbnd el cual busca un valor mínimo (puede que halla muchos dentro de un intervalo) de una función objetivo dentro de un intervalo que defina el usuario, para tal fin se definió la función $g(L) = |\mathcal{G}_{1,1}(L) - T|$ de tal forma que el valor de L que minimice la función g sobre el intervalo $(0, v]$ sera una solución de la ecuación mencionada antes. Con este resultado ya es posible encontrar el valor exacto de (1.6) bajo cualquier conjunto de parámetros. Los procesos descritos anteriormente se encuentran en el archivo **valoracion_intensidad.m**.

El caso del corolario 1.4.1 es similar al expuesto en la parte anterior, para empezar se debe considerar $\xi = 1$ y el calculo del termino (1.11) requiere de resolver la ecuación

$$\mathcal{G}_{0,1}(A) = T$$

donde $T \in [0, a^+)$. A diferencia del caso anterior, la ecuación planteada en esta ocasión se puede resolver utilizando el comando **fzero** que aproxima el valor de A el cual es solución de la ecuación $\mathcal{G}_{0,1}(A) - T = 0$, ya que $\mathcal{G}_{0,1}(A)$ resulta ser una función estrictamente creciente y por tanto la función $g(A) = \mathcal{G}_{0,1}(A) - T$ tiene un cambio de signo dentro del intervalo $[0, a^+)$, por lo que un proceso de minimización no se hace necesario.

Dentro de los archivos **graf_sigma_bono.m** y **graf_sigma_a.m** se encuentra el código implementado para procesar los valores de a^+ . El primero se utilizó para la creación de la figura 1.2 y la tabla 1.1 para de esta forma hacerse una idea de como el parámetro de volatilidad σ dentro del modelo; el segundo archivo se utilizó para la construcción de la tabla 1.2 la cual resulta útil para hacerse a una idea del alcance de la fórmula y como este se ve afectado por σ .

Las fórmulas presentadas por estos resultados teóricos también son implementadas en el código valoraciones.m para realizar una comparación entre el precio registrado en los datos y el precio arrojado por las fórmulas (1.3.1) y (1.14).

3.3. Calibración de Parámetros

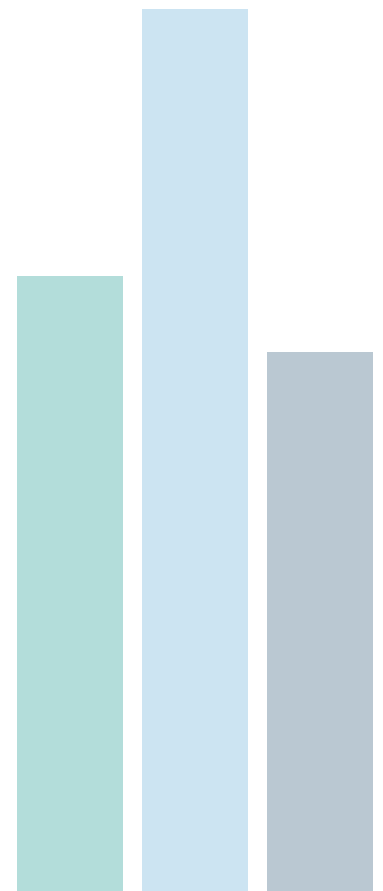
En esta sección se describe el proceso que lleva a cabo el código en el archivo **calibracion_trayectorias.m** para calibrar los parámetros del proceso λ_t haciendo uso de los datos observados, de tal manera que la mayoría de las trayectorias simuladas con los parámetros obtenidos se ajuste a la trayectoria observada. Para realizar la calibración de los parámetros se tiene en cuenta la ecuación (1.3.1) con la cual se construye la siguiente función

$$F(\Theta) = \sum_{j=1}^n \left(\mathbb{E} \left[e^{-v\lambda_{t_j}} \mid \lambda_0 \right] - e^{-\lambda'_{t_j}} \right)^2$$

donde Θ es el conjunto de parámetros del proceso λ_t y los valores λ'_t son observables o proporcionados a través de algún medio. Los términos t_j son los tiempos en los cuales fue posible realizar una observación dentro de la ventana de tiempo definida.

Para encontrar el mejor conjunto de parámetros se utilizó el comando **fgoalattain**, que aproxima la solución a la ecuación $F(\Theta) = 0$ condicionando los posibles valores de cada uno de los parámetros a un intervalo de posibles valores, en particular la idea de esta calibración es obtener valores no negativos para cada uno de los parámetros. Con los parámetros obtenidos ya es posible simular las trayectorias del proceso λ_t para cualquier ventana de tiempo $[0, T]$.

Como no es seguro que el proceso de simulación tenga en cuenta los tiempos t_j correspondientes a las observaciones realizadas, se programó un conjunto de reglas las cuales permiten extraer los valores simulados de λ_t para cada uno de los tiempos sobre los que pueda recaer nuestro interés, permitiendo de esta manera comparar los valores observados con los valores de cada una de las trayectorias simuladas para λ_t . Al final cada una de estas trayectorias es guardada en un archivo plano de formato cvs.



4. Implementación

El objetivo de este capítulo es mostrar la manera en que se implementaron los resultados teóricos mostrados en el capítulo 1 para modelar la tasa efectiva aprobada por el Banco de la República sobre los TES con un plazo de 364 días utilizando el Proceso de Contagio Dinámico con Difusión y observar la capacidad del modelo para captar los posibles escenarios de estrés que se pueden presentar el comportamiento de los datos observados, concentrando nuestra atención sobre un periodo de tiempo el cual abarque datos observados antes, durante y después de los efectos económicos provocados por la emergencia sanitaria mundial causada por el COVID- 19. También se quiere observar el desempeño de los resultados teóricos que pueden ser utilizados para la valoración de los bonos.

Los datos considerados sobre la tasas efectiva de corte para los TES con plazo de 364 días se encuentran disponibles en la pagina del Banco de la República dentro de la sección sobre estadísticas asociadas a TES¹ y si bien la pagina ofrece información de este el año 2006, nosotros la teoremas desde el año 2017 hasta el primer trimestre de 2022, esto con el objetivo de abarcar un periodo de tiempo en el cual sea posible observar el comportamiento convencional de la tasa y como esta cambio a causa de las medidas económicas adoptadas los gobiernos e instituciones financieras al rededor del mundo. Dentro del archivo en el que se descarga la información también se encuentran los precios asociados a cada una de las fechas, pero la calibración no se realiza respecto a dichos precios ya que el precio depende de la tasa efectiva determinada dentro de la subasta realizada por el banco.

Para la realización de este ejercicio no se fijaron los saltos internos y externos a eventos o decisiones de tipo económico nacionales o internacionales, se asumió que estos saltos seguían una distribución exponencial de parámetro β para los saltos internos y α para los saltos externos; se dejo plena libertad para que el proceso de calibración considerara estos parámetros y observar como el modelo captura el comportamiento de los saltos bajo la hipótesis de que estos son determinados por variables aleatorias exponenciales, en la vida real esto no es necesariamente cierto ya que los factores económicos que rodean el comportamiento de la tasa observada puede seguir una distribución completamente diferente.

A partir de este momento el término λ_t representa el proceso estocástico asociado a la tasa de efectiva de cierre registrada en los datos, la figura 4.1 muestra el comportamiento de los datos considerados para el ejercicio, donde la trayectoria de color rojo representa los valores observados de la tasa de interés de referencia y las demás trayectorias.

4.1. Calibración de Parámetros y Trayectorias

Debido a la gran cantidad de datos dentro de la ventana de tiempo escogida, se decidió dividir está en trimestres para asegurar la mayor exactitud posible sobre los parámetros obtenidos en el proceso de calibración, por lo tanto, hay un total de 21 trimestres entre el primer trimestre de 2017 y el primer trimestre de 2022 los cuales están determinados por la fecha registrada para cada una de las observaciones, es así que el primer trimestre de 2019 reúne todas las observaciones realizadas en fechas que corresponden a los meses de enero hasta marzo del 2019. El código utilizado para esta calibración no necesita que cada trimestre tenga la misma cantidad de observaciones ni que estén igualmente espaciadas, ya los años y trimestres considerados para este ejercicio no reúnen la misma cantidad de observaciones dentro de ventanas de tiempo técnicamente iguales.

¹<https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/tes-corto-plazo>

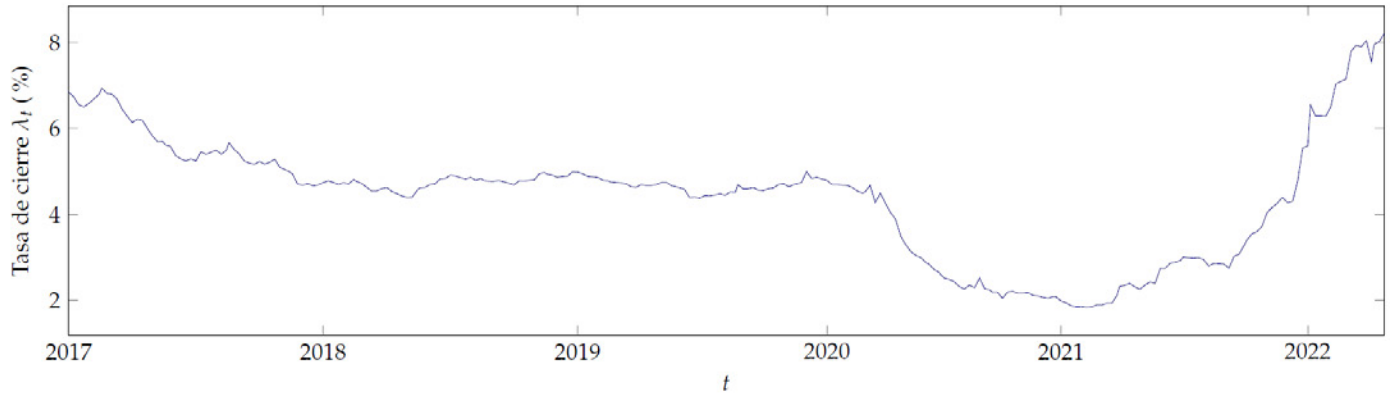


Figura 4.1: Gráfico de los valores observados para la tasa de cierre de los TES a corto plazo dentro de la ventana considerada.

Fuente: Creación propia.

Para cada una de las calibraciones el valor de λ_0 esta asociado a la primera tasa observada durante el trimestre sobre el que se estaba calibrando, los algoritmos utilizados en cada uno de los códigos requiere de un vector el cual inicialice el algoritmo de optimización que se esta implementando, en principio se inicializaba la calibración de un determinado trimestre con los valores obtenidos en el trimestre inmediatamente anterior, pero la idea se desecho debido a que en la mayoría de los casos los resultados obtenidos no diferían de los valores utilizados para inicializar el proceso, por este motivo todos los procesos de calibración se inicializaron con el mismo conjunto de valores

$$(a, \delta, \sigma, \beta, \alpha, \rho) = (0.9, 1, 0.8, 1.2, 1, 0.1).$$

Trimestre	a	λ_0	δ	σ	β	α	ρ
1er 2017	0.9715	6.8490	1.5660	10.0739	0.3447	9.7691	0.0597
2do 2017	0.0453	6.1400	3.7177	0.1394	0.6301	94.5848	0.0008
3er 2017	5.1863	5.2490	0.0094	1.0819	2.5871	9.8105	0.0095
4to 2017	0.5871	5.2400	0.0255	1.4366	0.0707	95.5198	0.0151
1er 2018	0.0873	4.7450	0.4970	0.8391	1.2960	9.9984	0.0000
2do 2018	0.2528	4.6290	0.8485	1.4922	1.1285	6.5541	0.0301
3er 2018	0.3357	4.9190	0.1895	1.2700	1.6939	0.0000	0.0026
4to 2018	0.2673	4.6900	2.3798	0.3623	7.7071	11.4349	3.4523
1er 2019	2.3849	4.9900	0.0209	2.0161	0.0000	0.0000	0.0000
2do 2019	0.2728	4.6990	0.3214	0.0579	0.4975	1.0476	0.0050
3er 2019	0.4906	4.4430	2.1203	1.8770	4.2800	0.7449	4.0394
4to 2019	0.6670	4.6000	0.1764	2.4340	2.7587	0.0000	0.0338
1er 2020	0.1815	4.8000	0.0000	0.8428	0.2230	14.0636	0.0004
2do 2020	0.0000	4.4990	1.3952	5.0922	0.7565	116.3366	0.0456
3er 2020	0.2966	2.5200	0.7456	2.1338	24.3228	666.1793	3.6476
4to 2020	0.9784	2.1980	1.9231	18.3568	0.8755	0.0000	0.2106
1er 2021	1.3447	1.9900	0.5010	14.3484	0.8636	97.4245	0.0044
2do 2021	0.5183	2.3550	0.4957	3.4559	0.6370	7.5492	0.0171
3er 2021	1.3773	3.0000	0.6629	9.9698	0.7789	0.0001	0.1075
4to 2021	1.9892	3.5470	0.2631	6.4760	0.2647	100.0000	0.0072
1er 2022	0.7678	5.6000	0.3621	2.6884	1.4357	0.0004	0.0011

Tabla 4.1: Parámetros obtenidos para cada uno de los trimestres dentro de la ventana de tiempo que abarca los datos.

La tabla 4.1 se presenta el conjunto de parámetros obtenidos luego de la implementación del código para cada uno de los trimestres considerados. Cada conjunto de parámetros obtenido, nos permiten graficar las trayectorias inducidas por los mismos y compararla con la serie de valores observados, las gráficas en la figura 4.3 muestran algunos de los casos que se pueden dar al simular las trayectorias utilizando la calibración los parámetros bajo las condiciones propuestas. En este caso, los gráficos muestran la alta sensibilidad que tiene el modelo a la magnitud de los posibles saltos que se pueden dar dentro del periodo de tiempo observado, haciendo que el valor que toman los parámetros σ , α y β sean los más influyentes a la hora de determinar el comportamiento de las trayectorias simuladas. en este caso, se esperaría que al calibrar parámetros respecto a datos que presentan baja variación los valores de ρ , σ , α y β sean bajos, se esperaría lo contrario en el caso donde los datos observados presentan una alta variación.

Simulación de Trayectorias para el Segundo Trimestre de 2022

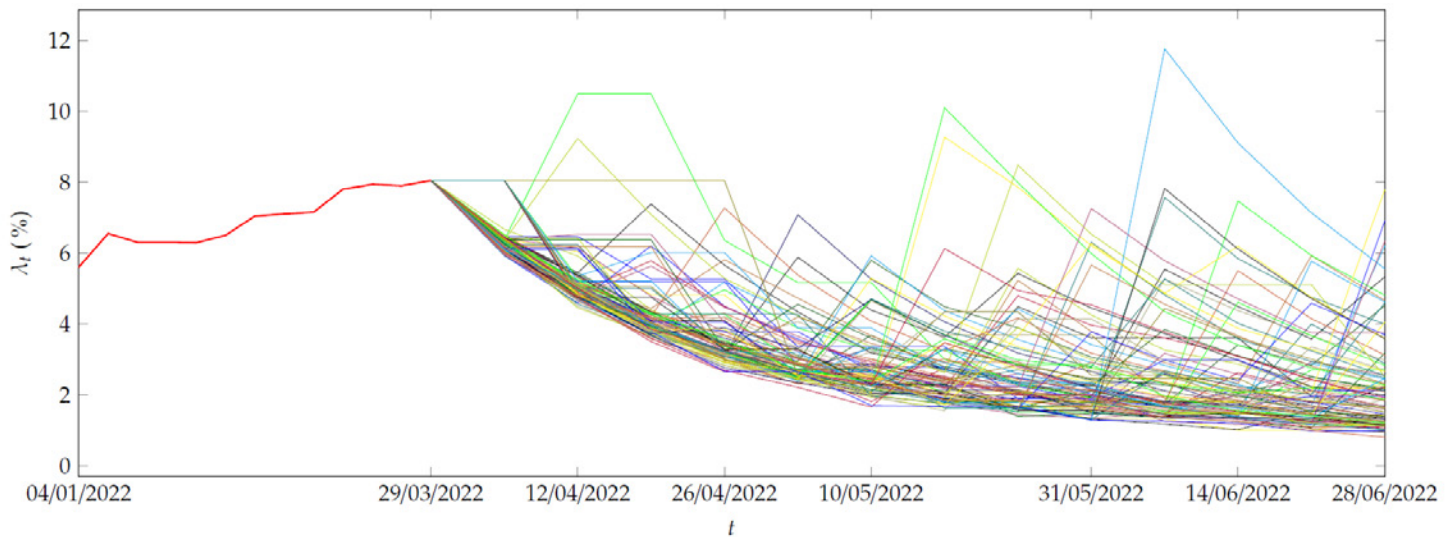


Figura 4.2: Trayectorias simuladas para el segundo trimestre de 2022 con los parámetros del primer trimestre de 2022

Fuente: Creación propia.

Teniendo en cuenta los parámetros obtenidos para el primer trimestre de 2022 y suponiendo que el comportamiento futuro se seguirá ajustando a estos parámetros, es posible simular trayectorias asociadas al comportamiento de la tasa de interés para el siguiente trimestre, el correspondiente segundo trimestre de 2022 genera su primera observación el 4 de marzo de 2022 y la última el 28 de junio de 2022; para un total de 13 observaciones; en este caso se supuso que la última observación se realizaba el 21 de junio, con el fin de manejar 12 observaciones. Las trayectorias obtenidas se muestran en la figura 4.2, donde se muestra la trayectoria observada del primer trimestre de 2022 en rojo y las simulaciones en varios colores, asumiendo además que, λ_0 corresponde al último valor observado en el primer trimestre, el cual fue de 8.05 %.

4.2. Comparación de los Precios Simulados y los Observados

Con la calibración de parámetros hecha para cada uno de los trimestres en cuestión, es posible realizar una comparación entre los precios observados y los obtenidos a través de los resultados del corolario (1.3.1) y la fórmula (1.14), en la tabla 4.2 se muestra la comparación entre los precios calculados de forma teórica respecto a los precios observados al final del trimestre correspondiente. En dicha comparación es posible observar que hay trimestres para los cuales el precio calculado utilizando los resultados ya mencionados con los parámetros calibrados no logran captar de forma adecuada el comportamiento observado de la tasa de interés, debido a que la diferencia entre los precios teóricos y observados es significativa; dicho panorama se puede observar en los resultados obtenidos para el tercer trimestre de 2018, el segundo trimestre de 2019 y 2020 y el primer trimestre de 2022

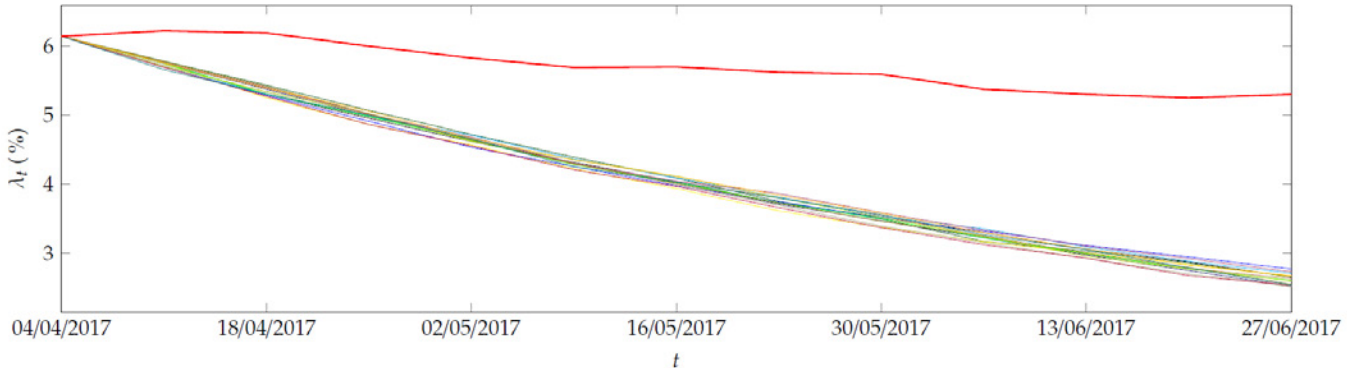
Por otro lado las gráficas de la figura 4.3 muestran que si bien los resultados pueden o no estar cerca a los datos observados, esto no es evidencia de que una menor diferencia entre estos resultados implique un mejor ajuste entre los datos observados y las trayectorias simuladas con los parámetros obtenidos, por ejemplo, en el segundo trimestre de 2017 se dan resultados teóricos bastante cercanos a los valores del precio observado, pero aun así el comportamiento de las trayectorias simuladas no recrea de forma aproximada el comportamiento observado en los datos reales.

Es necesario aclarar que las fórmulas (1.3.1) y (1.14) pretenden modelar únicamente el comportamiento de la tasa efectiva, por lo que estas fórmulas no alcanzan a captar otro tipo de información importante dentro del proceso de valoración de un producto como un TES, aun así, hay trimestres en los cuales la fórmula (1.13) representa una aproximación satisfactoria al precio observado.

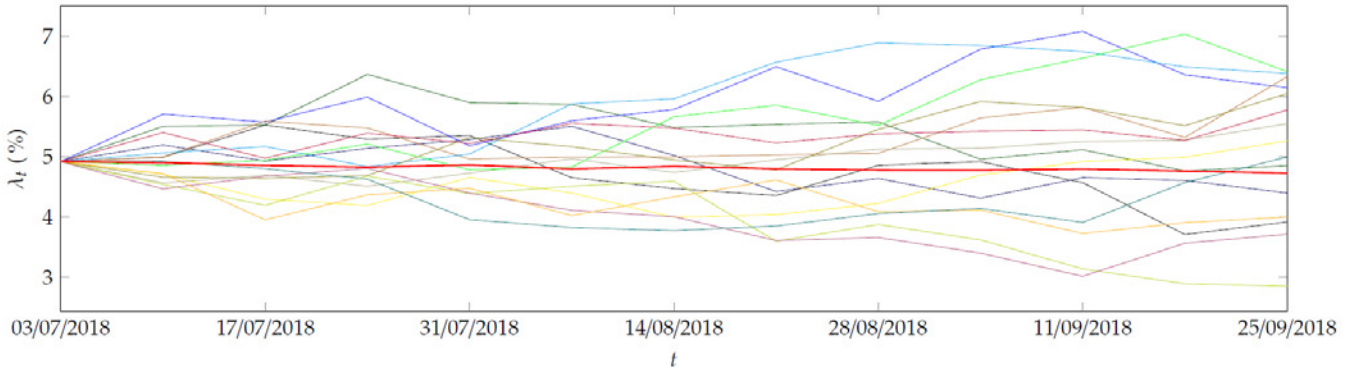
Trimestre	Precio observado	Fórmula (1.6)	Fórmula (1.13)
1er2017	94.5540	98.5669	92.4732
2do2017	95.3060	94.8166	95.4178
3ro2017	95.3140	94.7041	93.8853
4to2017	95.7370	95.2439	94.0218
1er2018	95.8370	95.3733	95.1250
2do2018	95.5880	95.1128	92.0303
3ro2018	95.7840	95.2939	89.8549
4to2018	95.5400	95.0598	93.9965
1er2019	95.7770	94.8588	92.0333
2do2019	95.9970	97.3828	215.5441
3ro2019	95.8620	95.5642	98.0902
4to2019	95.7760	94.8875	90.5642
1er2020	96.0300	95.7497	96.2799
2do2020	97.7350	99.3896	101.4578
3ro2020	98.0190	97.4178	96.5902
4to2020	98.2020	95.6520	96.3956
1er2021	97.8800	97.8535	97.5583
2do2021	97.3160	95.6226	93.2482
3ro2021	96.8420	95.1986	93.9061
4to2021	95.1080	95.4871	92.2793
1er2022	93.5190	91.3839	81.2983

Tabla 4.2: Comparación entre los precios observados y los resultados teóricos 1.3.1 y 1.4.1

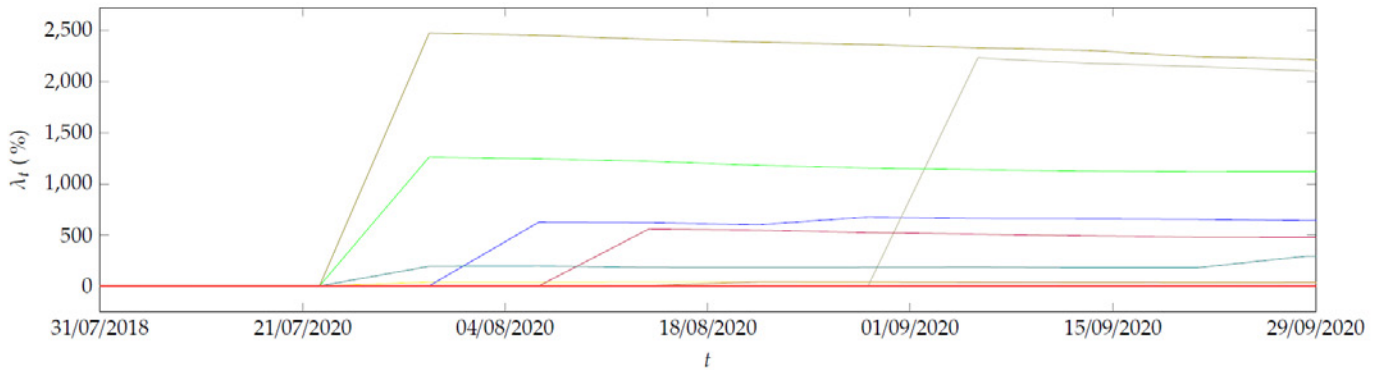
Trayectorias para el Segundo Trimestre de 2017



Trayectorias para el Tercer Trimestre de 2018



Trayectorias para el Tercer Trimestre de 2020



Trayectorias para el Primer Trimestre de 2022

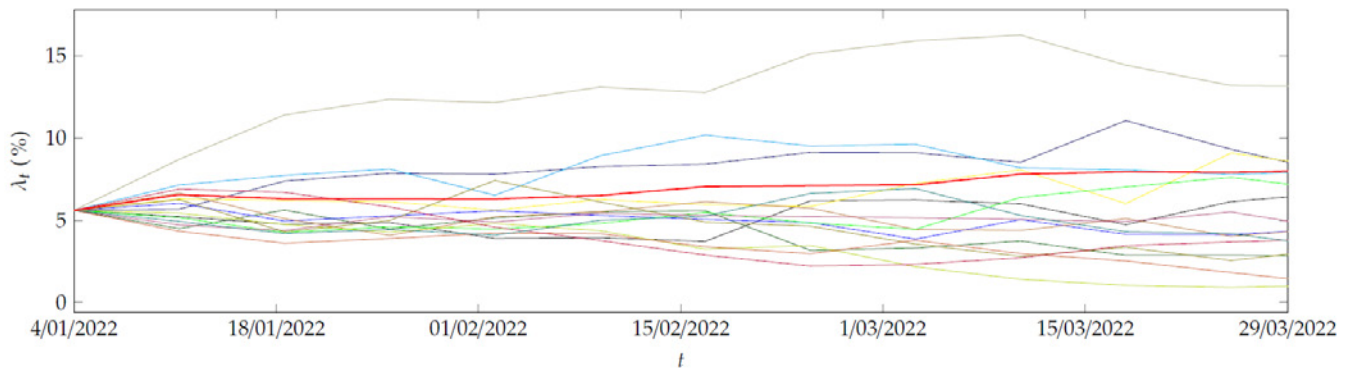


Figura 4.3: Ejemplos de las trayectorias obtenidas para algunos de los trimestres trabajados.
Fuente: Creación propia.

5. Conclusiones

Esta tesis realiza un acercamiento a la implementación del Proceso de Contagio Dinámico con difusión como modelo de tasa corta el cual puede capturar los saltos dentro de la estructura observada de una tasa de interés como un proceso estocástico λ_t que son provocados por factores económicos o coyunturales que afectan el comportamiento del mercado en el que dicha tasa se mueve y que llegan a impactar el comportamiento de la misma, es así que, las trayectorias generadas al implementar el modelo bajo la suposición de que los saltos del proceso están determinados por variables aleatorias exponenciales resulta arrojar resultados aproximados a lo que se puede esperar de un modelo de tasa corta calibrado dentro de una ventana de tiempo pequeña, si bien la calibración realizada dentro de algunas de las ventanas de tiempo no siguen el comportamiento esperado, esto no se debe necesariamente a las características del modelos o la calidad de los datos, si no tal vez, a los algoritmos utilizados durante el proceso de automatización.

Si bien se sabe que nada garantiza que los saltos, tanto internos como externos, que afectan el comportamiento de la tasa efectiva siguen una distribución probabilística, de tipo exponencial, las trayectorias obtenidas en la figura 4.3 para el tercer trimestre de 2018 y el primer trimestre de 2022 que la calibración de los parámetros puede lograr un buen ajuste de las trayectorias en torno a la información observada. Todas las gráficas nos muestran la sensibilidad del modelo antes los valores de cada uno de los parámetros y en especial la posibilidad de que las trayectorias puedan dar saltos mas allá de los valores observados debido al comportamiento exponencial que se supuso, como es el caso de las trayectorias simuladas para el tercer trimestre de 2020 las cuales debido al gran valor asignado al parámetro α hace que el modelo pueda llegar a considerar los saltos internos del proceso en magnitudes significativamente grandes.

Si bien para el segundo trimestre de 2017 la diferencia en los precios calculados en la tabla 4.2 son relativamente pequeñas, esto no implica que los parámetros calibrados generen trayectorias ajustadas al comportamiento observado, de hecho, en este caso particular los parámetros generan trayectorias con una tendencia a la baja del valor de la tasa de interés mucho mayor a la que muestran los datos observados. En el caso del primer trimestre de 2022 los parámetros generan resultados alejados del precio observado, de hecho el precio obtenido a través de la fórmula (1.13) es bastante bajo respecto al observado, por lo que se esperaría que las trayectorias simuladas para este trimestre y el trimestres siguiente tengan una tendencia al alza, pero el gráfico de estas simulaciones tiene tendencia a la baja para ambos trimestres en especial el segundo.

El parámetro σ resulta jugar un papel muy importante hay que este junto a la integral estocástica presente en la definición de λ_t hacen que los valores del proceso se comporten de manera mas acorde a lo que se observa en el mercado. Al momento de simular o implementar alguno de los procesos de automatización, resulta muy importante tener clara la magnitud de este parámetros, ya que en muchas ocasiones un valor grande de este puede hacer caer los algoritmos programados en bucles infinitos al generar números muy cercanos a cero los cuales hacen que los criterios de comparación y algunos cálculos no sean realizados por el sistema.

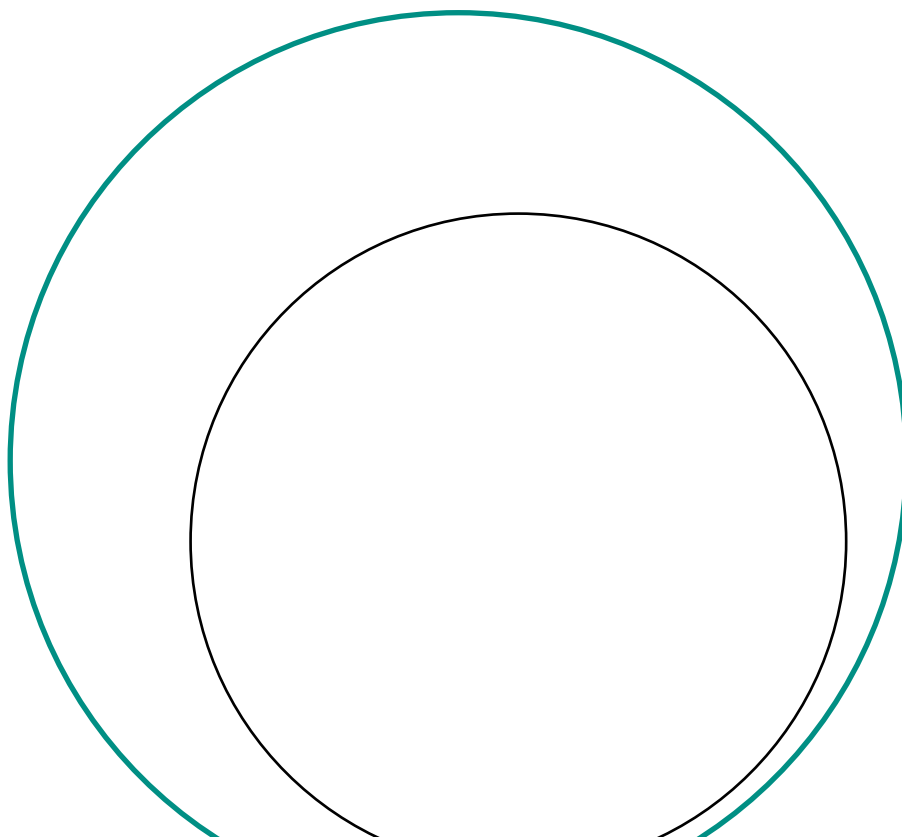
El ejercicio de valoración realizado nos da a entender que los resultados teóricos escogidos son buenos candidatos para la valoración de los TES, pero a su vez se hace evidente el hecho de que falta involucrar información y condiciones las cuales permitan realizar el ejercicio de valoración con mayor exactitud y mucho mas fiel al proceso del que se obtienen los datos observados.

Si bien se escogió MATLAB por su versatilidad y las alternativas que este ofrece para resolver los problemas numéricos que se presentaron durante la implementación de los resultados teóricos, se llegan a dar casos de

conjuntos de parámetros con los cuales los tiempos de ejecución aumentan drásticamente en comparación con los demás o para los cuales definir condiciones de frontera sobre intervalos relativamente pequeños hace que los algoritmos detengan todo el proceso que se está llevando a cabo, haciendo necesario el cambio de las condiciones del problema con tal de que los comandos se ejecuten de forma satisfactoria entre diferentes conjuntos de datos; debido al desconocimiento de condiciones iniciales o de frontera que ayudaran a acotar los posibles valores de los parámetros, el problema de calibración exige más que encontrar puntos los cuales optimicen el problema planteado, lo que hace necesario involucrar algoritmos de optimización los cuales, en lo posible, no dependan de los valores iniciales y condiciones de frontera.

Finalmente, se deja para futuras investigaciones las siguientes propuestas:

- ¿Cómo se comporta el modelo al definir el comportamiento de los saltos con distribuciones de probabilidad que no sean exponenciales?
- ¿Que algoritmos son adecuados para resolver los problemas planteados en (1.3.1) y (1.14)?
- Caracterizar la independencia de los parámetros en el modelo.
- ¿Como cambia el modelo al considerar a σ como un proceso estocástico sobre t ?
- ¿Que condiciones se deben involucrar para que los resultados en el teorema 1.3.1 y el corolario 1.4.1 puedan ser empleados para la valoración de TES?



Referencias

- [1] Brigo, D., and Mercurio, F. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance. Springer, 2001.
- [2] Dassios, A., Jang, J., and Zhao, H. A generalised CIR process with externally-exciting and self-exciting jumps and its applications in insurance and finance. *Risks* 7 (10 2019), 103.
- [3] Dassios, A., and Zhao, H. A dynamic contagion process. *Advances in Applied Probability* 43 (09 2011).
- [4] Dassios, A., and Zhao, H. Efficient simulation of clustering jumps with CIR intensity. *Operations Research* 65 (10 2017), 1494–1515.
- [5] Dassios, A., and Zhao, H. A generalised contagion process with an application to credit risk. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 20 (02 2017).
- [6] Davis, M. H. A. Piecewise-deterministic markov processes: A general class of nondiffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 46, 3 (1984), 353–376.
- [7] Dirección General de Crédito Público y Tesoro Nacional, . *Estrategia de Gestión de la Deuda de Mediano Plazo*. Ministerio de Hacienda y Crédito Público, Agosto 2018.
- [8] Fabozzi, F. J. *Bond markets, analysis, and strategies.*, 7th ed.. ed. Prentice-Hall, 2008.
- [9] Filipovic, D. *Term-Structure Models: A Graduate Course*. Springer Finance. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [10] Gerencia de Certificación e Información, . *Guía de Estudio Renta Fija*, primera ed. Autoregulador del Mercado de Valores (AMV), Marzo 2019.
- [11] Zhao, H. *A dynamic contagion process for modelling contagion risk in finance and insurance*. PhD thesis, 10 2012.



The Pricing of Liquidity Risk in the Colombian Stock Market.

**Daniel
Machuca Acevedo**

1. Summary

This document seeks to assess how liquidity risk impacts the return of assets in the Colombian financial market. For this, an extension of the CAPM (*“Capital Asset Pricing Model”*) known as LCAPM (*“Liquidity Adjusted Capital Asset Pricing Model”*) was used. This model includes different dimensions of liquidity. According to the results, liquidity risk is not a determining factor for pricing financial assets in Colombia. This is in line with some empirical work showing a relationship between liquidity and asset return only in developed financial markets. In contrast, it was found that market risk is a relevant variable for investors, which implies that the CAPM model is valid in the Colombian financial market. Some possible explanations for the results found are (i) the small number of shares available to invest in the Colombian market, (ii) the excessive monitoring of investors over companies, especially institutional investors, and (iii) the fact that the most relevant shares of the local stock market are traded in more than one market.

2. Introduction and research question

The pricing of financial assets is one of the most relevant topics for finance, as this determines the return associated with these assets. Pricing models through risk factors are prevalent and used in modern finance (see Sharpe, 1964; Lintner, 1965; Fama & French, 1992). In particular, the CAPM model (*Capital Asset Pricing Model*), despite multiple criticisms of its methodology and questions about its validity, is the most popular pricing model among portfolio managers, appraisals, and asset valuers, among others.

One of the main criticisms of this methodology states that market risk cannot be the only variable that determines the price of assets. Multiple variables such as the size of companies, the investment horizon, the political risk of the markets, or the liquidity of assets, among others, affect the profitability of assets. Therefore, extensive literature seeks to find the determinants of asset prices and their expected profitability. Liquidity risk has been an essential element in the literature (See Amihud & Mendelson 1986, 2008). However, liquidity poses an additional challenge because it is a non-observable characteristic of assets and does not have a single definition; therefore, researchers quantified liquidity using various methodologies.

Pricing models and risk factor analyses have been evaluated empirically in developed financial markets, where results mostly show a positive relationship between the expected return of assets and liquidity risk. Investors demand a higher return for those assets that are considered illiquid. Unfortunately, for underdeveloped financial markets, these analyses are limited. From existing studies, it is not possible to say that a similar relationship between liquidity and return has consistently been found for emerging markets.

Notably, for the Colombian case, few works have explored the validity of the CAPM model, and even fewer have been responsible for evaluating the liquidity of the Colombian stock market. In this regard, Taborda & French (2017) document a negative relationship between the expected return of assets and liquidity risk for Colombia, contrary to the results found in the literature for developed financial markets. In contrast, Fernandez & Vasquez-Tejos (2020) find a premium in return that compensates those investors who invest in less liquid stock. For his part, Agudelo (2010) finds an equivalent relationship to Fernandez & Vasquez-Tejos, but only for highly traded stocks. For the rest of the assets, he finds no relationship.

This paper seeks to evaluate the effect that liquidity risk has on price determination in the Colombian stock market through an extension to the CAPM model known as "*Liquidity adjusted Capital Asset Pricing Model*" (LCAPM) proposed by Acharya & Pedersen (2005). The primary purpose is to solve the following research question: What is the impact of liquidity risk on determining the prices of financial assets in the Colombian stock market?

The proposed model has the advantage of disaggregating liquidity into three dimensions, facilitating more detailed analysis of this variable. The results confirm the importance of market risk for Colombia but show that liquidity risk appears to be an aspect that is not considered by market actors when setting the prices of financial assets. The following are potential explanations for the previous results: (i) the small number of assets available in the Colombian stock market; investors may prefer a diversified portfolio over the concerns associated with liquidity risk, (ii) excessive monitoring of the financial results of listed companies, the latter taking into account the quality of investors in the Colombian market, who are primarily institutional investors (including the Colombian government) and, (iii) the impact of liquidity from foreign markets on the return of local companies that are traded in more than one market (for example, on the U.S. stock exchange through ADRs "*American Depositary Receipts*").

This paper differentiates from previous papers for Colombia, mainly in the methodology implemented and the disaggregation of liquidity risk. Likewise, this paper allows us to partially corroborate the results of Agudelo (2010), to the extent that there is no relationship between liquidity risk and price for the Colombian stock market, while Agudelo finds the same result only for highly traded assets.

Additionally, it joins the scarce literature on liquidity in Colombia, and it makes explicit the following contributions: (i) validates the CAPM model for the Colombian financial market, (ii) demonstrates and estimates the persistence of liquidity in the Colombian financial market, (iii) studies liquidity in its different dimensions. This disaggregation of liquidity risk allows to study and explain in detail the relationship between liquidity and return of assets, (iv) finds that it cannot be said that liquidity risk is a factor associated with the determination of the prices of financial assets in the Colombian stock market and, (v) raises possible explanations for the results found. Similarly, the results of this research are relevant to financial market participants and may impact portfolio managers. Based on these results, it could be inferred that managers are not considering liquidity considerations for the valuation of assets and the formation of efficient portfolios.

The document is organized as follows: in section 3, a review of the relevant literature for the topic is made, section 4 develops the LCAPM model to be estimated, section 5 presents the econometric methodology used, section 6 analyzes the results found, and finally, section 7 proposes possible explanations to the results of section 6.

3. Literature review

The literature review is carried out in four aspects. First, the definition of liquidity and the literature's approaches to this concept, its characteristics, and its determinants are introduced. Secondly, the methodologies or measures that have been used in the literature to quantify liquidity are reviewed. Thirdly and fourthly, the relationship between liquidity and the return of financial assets in developed and underdeveloped markets is reviewed.

3.1 Liquidity and financial markets

Liquidity can be defined as the ability to trade an asset at the market price at the required time (Cooper, Groth & Avera, 1985). For markets, liquidity is a characteristic associated with the speed in *low-cost trading* without affecting the price of assets (Liu, 2006). Liquidity itself is not observable. In this sense, it is necessary to understand the determinants of liquidity and under what criteria it can be quantified.

Some of the most common definitions of liquidity in the literature are (i) the ability to convert an asset into money or vice versa with the lowest possible transaction costs (Aitken & Comerton-Forde, 2003), (ii) the ability to liquidate a position or investment in the shortest possible time at a competitive market price (Zorrilla, 2005) and, (iii) the risk in the sale of an asset derived from multiple factors such as the ability to convert an asset into cash, delays in the sale processes and having to accept prices below the market price (Hernandez, 2015).

The literature has studied liquidity from several perspectives. Firstly, we can find the aspects or characteristics that define the liquidity of a market. Secondly, through the determinants or sources of liquidity, and, finally, from the dimensions where liquidity is observed.

According to Kyle (1985), the defining aspects of liquidity are market rigidity, depth, and resilience. Rigidity refers to the cost of buying or selling quickly; depth is the number of purchases or sales that affect the asset's price, and resilience is the speed at which the asset's price returns to its fundamental value after an unexpected shock. From another perspective, Chordia et al. (2005) argue that among the characteristics associated with liquidity are: a) the persistence over time of liquidity levels, which is relevant to the extent that investors would be able to predict the levels of future liquidity of an asset. b) the quantification of liquidity risk, and c) the co-movements between the liquidity of the asset (idiosyncratic) and the liquidity of the market (communal). In practice, this implies that the individual return on assets will depend on the liquidity risk of the market; to this extent, the idiosyncratic liquidity risk cannot be completely diversified.

Regarding the determinants of liquidity, Pritsker (2003) argues that the primary sources of illiquidity of financial markets are: i) transaction costs, that is, the cost of orders, commissions, agency, or brokerage, ii) cost of asymmetric information, iii) imperfect competition that derives from large transactions and, finally, iv) uncertainty. The latter leads market operators to expand buying and selling prices to protect themselves from potential losses associated with unanticipated situations.

Finally, it is essential to determine where liquidity is observed to quantify it properly. According to Amihud & Mendelson (1991), liquidity is observed in at least four dimensions: (i) the difference between the bid prices and the ask prices of the asset, (ii) the impact on the market of large transactions, (iii) delays in finding a buyer-seller and, (iv) direct transaction costs. Liquidity proxies or measures used by researchers come from these four dimensions.

3.2 Liquidity measures

The primary liquidity *proxies* found in the literature can be classified into three groups: (i) Measures of impact on price, whose leading representative is the measure developed by Amihud (2002). This indicator seeks to answer how the price of an asset changes concerning its traded volume. The more significant the change in the asset's price versus a given traded volume, the lower the liquidity of the asset. (ii) Measures of transaction costs, such as the *Bid-Ask spread* (Amihud & Mendelson, 1986). This measure seeks to capture the transaction costs of an asset. The higher the bid and ask price gap, the higher the transaction costs and, therefore, the lower the liquidity of the asset. (iii) The third measure concerns the traded volume of shares. The standard measure is a ratio between the volume traded and the total shares outstanding. This measure is trendy in the literature of developed markets and is known as “*turnover*.”

Each of the above proxies approaches different aspects and sources of liquidity. For example, the *Bid-Ask* spread measure captures a) transaction cost, b) information asymmetries, c) costs for oligopolistic structures in the market, and d) costs of inventory movements. On the other hand, Amihud's measure (2002) captures the impact that large operations have on the market and evaluates how sensitive the asset's price is to changes in the volumes of the traded shares.

This document will implement as a liquidity measure the one defined by Amihud. This measure has some advantages: (i) it captures the definition of the asset price, (ii) the data for the calculation is relatively easy to obtain, and (iii) it works for periods where the asset price does not change. This liquidity measure helps study emerging markets, where periods of inactive stocks are usual. Additionally, Goyenco, Holden & Trzcinka (2009) found that it is the best measure when having low-frequency data series (for stock markets, daily series are considered low-frequency).

3.3 Return and liquidity in developed financial markets

In one of the first papers on liquidity and return of assets, Amihud & Mendelson (1986) demonstrated that, for the U.S. stock market, specifically the “*New York Stock Exchange*” (NYSE), there was a positive relationship between the return of assets and the margin of the bid and ask prices of shares. Subsequently, it has been shown through empirical approximations that this relationship depends on the type of market being studied, the liquidity measure used, and the estimation methodologies implemented.

Comparable results to Amihud & Mendelson have been documented by Brennan & Subrahmanyam (1996) and Goyenco, Holden & Trzcinka (2009). This result is maintained when implementing different measures of liquidity; for example, Datar et al. (1998) assess this hypothesis using a measure of “*share turnover*,” Lesmond et al. (1999) use a measure of “*zero daily returns*,” and Liu (2006) uses a measure that jointly involves the two previous measures.

For developed financial markets, empirical works mostly agree that there is a positive (negative) relationship between the return of an asset and its illiquidity (liquidity). That is, the existence of a liquidity premium is evident. This means that investors demand a higher expected return for assets that historically have low levels of liquidity; in other words, they seek to offset liquidity risk through the asset price (Acharya & Pedersen, 2005). The other way around, Pastor & Stambaugh (2003) suggest that an investor is willing to accept a lower return on those highly liquid assets when the market is illiquid or, according to Lynch & Tan (2011), when the market is down.

Acharya & Pedersen are the first to disaggregate the relationship between asset return and liquidity risk. In this way, they manage to assess the theories of Pastor & Stambaugh and Lynch & Tan, among others. This model is known as LCAPM, a liquidity risk extension of the CAPM model that traditionally is used to understand and quantify the relationship between market risk and asset return. Through the LCAPM model, Acharya & Pedersen find that for the U.S. market, a higher level of expected return is associated with higher expected transaction costs, which equates to higher liquidity risk.

In other developed markets other than North America, a meaningful relationship has also been found between liquidity risk and return on assets. For Europe, Martinez et al. (2005), who examine the role of systematic risk in the Spanish market, finds that liquidity risk impacts the price of assets. In another paper, Sadka (2006) finds that *price momentum* and announcements of financial results explain a portion of liquidity, i.e., that the impact of liquidity on the price of the asset is explained by variations or “innovations” in liquidity (as they have been called in the literature). In Germany, Czauderna, Riedel & Wagner (2015) find that higher returns offset periods of market illiquidity. For the Asian markets, the papers of Lam & Tam (2011) in Hong Kong and Narayan & Zheng (2010) in China are some of the most relevant, finding the existence of a premium for liquidity risk.

3.4 Return and liquidity in underdeveloped financial markets

There is a relative consensus in the literature: illiquid assets are expected to have a higher return than liquid assets. In emerging markets, this relationship does not seem to be evident. In addition to the low development of financial markets in these countries, there is also limited availability of data sets, making further analysis difficult.

In emerging markets, the use of the CAPM model and its extensions, such as the LCAPM model, presents multiple problems. For example, (i) the size of stock exchanges; (ii) the importance of securities markets in the economy; (iii) the high concentration of stock markets; (iv) limited, inaccurate and volatile information on markets and the cost of capital; (v) the low magnitude of the time series. (Ramirez, 2012) Below are some papers that have addressed the problem of liquidity and profitability in emerging markets.

Traditionally, emerging markets have shown lower liquidity than developed markets. According to Taborda & French (2017), the primary concern of portfolio managers in emerging markets has been the net profitability of transaction costs; that is, the expected profitability should be higher when transaction costs are high. However, Taborda & French find that the empirical evidence goes against the theoretical evidence for Brazil, Chile, Colombia, and Peru, since the most liquid assets show a correspondingly higher return.

The above paper opposes the one of Bekaert, Harvey & Lundblad (2007), who find that in emerging markets, transaction costs are higher for illiquid assets versus what they are in more developed financial markets. Therefore, investors should seek higher returns to compensate for those higher transaction costs. In short, they find that the most illiquid assets are therefore the best-performing assets. Cheriyan & Lazar (2017) find the same results for the Indian stocks market.

Minardi, Sanvicente & da Costa (2005) find that for Brazil, the most liquid firms are those that show higher returns. Bekaert et al. (2007) find for Latin America and Southeast Asia that liquidity shocks are positively correlated with current stock returns and negatively correlated with their dividend returns. Baten & Vo (2014) find a positive relationship between return and liquidity in Vietnam. Miralles, Millares & Oliveira (2017) find that the most liquid assets are those that present better returns for the Portuguese market.

Lee (2011) goes a little further and shows that liquidity does not positively or negatively affect the return on assets. Lee finds that the price impact of liquidity risk, regardless of direction, is most potent in developed economies. In the same vein, Leirvik, Fiskerstrand & Fjellvikas (2017) find no evidence of any relationship between asset returns and liquidity in the Norwegian market.

In the Colombian case, few papers focus on analyzing liquidity. The most concrete examples are Taborda & French (2017), which, as already mentioned, find a negative relationship between risk of illiquidity, and return of assets. The paper of Agudelo (2010) finds a positive relationship between liquidity and returns on assets. However, this relationship is only fulfilled for highly traded stocks. In other stocks, he does not find a statistically significant relationship. Finally, Fernandez & Vasquez-Tejos (2020) find a premium in the return that compensates those investors who invest in less liquid assets. There is little consistency in the results found for the Colombian market.

In any case, the academic literature associated with liquidity risk and, in general, on the pricing of financial assets is minimal. Some studies regarding the CAPM model present contradictory conclusions. For example, Burbano (1997), Estrada (2003), and Martinez (2012) conclude that the CAPM model is valid in the Colombian market. For their part, Mongrut (2006), Velez (2007), and Sarmiento & Velez (2008) find that it is not possible to establish a conclusive relationship between the market risk premium and the return on assets, calling into question the validity of the CAPM model.

Therefore, there is no consensus on the relationship between liquidity risk and the return on financial assets for emerging economies. However, contrary to the evidence for mature markets, liquidity is not relevant in underdeveloped markets, or liquidity positively influences asset prices. One of the possible explanations lies in the small number of financial assets in these markets, making the need for diversification outweigh the concerns associated with liquidity risk. Another possible explanation would indicate that the higher volume of asset sales could lead to more effective monitoring by investors, translating into better returns (French & Taborda 2018).

4 Theoretical framework

The theoretical framework has two parts. The first focuses on theoretically explaining the CAPM model, and the second is to derive the proposed extension for this model, known as LCAPM.

4.1 CAPM Model

The main goal of the theory of efficient portfolios is to study the relationship between the return of assets and risk factors in determining the market price of financial assets. The literature's most studied type of risk is market risk, which gives rise to the CAPM model. According to portfolio theory, an investor seeks to maximize the expected return of a portfolio given a level of risk or minimize the risk of the portfolio given a level of expected return (Markowitz, 1952). Markowitz stipulates that an efficient portfolio is a Pareto optimum, that is, that it cannot be improved in expected profitability without increasing the risk associated with that return, and vice versa. So, given a level of risk in an efficient portfolio, there is no other portfolio composition that results in superior expected returns. (Sharpe, 1964; Lintner, 1965).

Portfolio theory assumes that investors base their investment decisions on the expected return and risk of assets, thus choosing their portfolio from the efficient frontier. The CAPM model is concerned with the price of assets in equilibrium (Perold, 2004). Since investors behave according to the precepts of portfolio theory in equilibrium, there will be no market composition that improves such an equilibrium.

The relationship between the asset's expected return and its volatility is critical in defining the asset's price. The CAPM model is the dominant method in modern finance to estimate the cost of capital for investment decisions. Although it presents multiple criticisms for its simplicity, there is consensus in the academic field regarding its benefits (Banz, 1981).

The following is the standard structure of the CAPM model:¹

$$E(r_t^i) = E(r_t^f) + E(r_t^M - r_t^f) * \beta^i \quad (1)$$

Where,

$$\beta^i = \frac{cov(r_t^i, r_t^M)}{var(r_t^M)} \quad (2)$$

The variable $E(r_t^i)$ represents the expected value of the return of asset i in period t ; r_t^f is the risk-free rate in period t ; r_t^M is the return of the market in period t and β^i is the risk factor of the model, which captures the market risk associated with asset i in portfolio M (in this case the total market). The variable β^i measures the volatility of the expected return of the asset i concerning the expected average return of the market. The higher the volatility, the riskier the stock.

¹This expression arises from the work of Sharpe (1964).

From the above formula, three main characteristics of the CAPM model can be extracted:

- I. The relationship between the expected return of asset i and its measure of risk relative to the market (β^i) is linear.
- II. β^i is the full measure of the risk of asset i in portfolio M . The difference between the premium of asset i and the premium of the market is β^i . This property is easily derived from equation (1):

$$E(r_t^i) - E(r_t^f) = E(r_t^M - r_t^f) * \beta^i \quad (3)$$

- III. In a market with risk-averse investors, higher risk should be associated with a higher expected return. In other words, this indicates that the expected sign of β^i in equation (1) is positive.

Using the estimation methodology proposed by Fama & MacBeth (1973), we could start from the following equation:

$$r_t^i = \gamma_0 + \gamma_1\beta_i + \gamma_2\beta_i^2 + \gamma_3S_i + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

The three characteristics above can be verified from equation (4). Through β_i^2 , it is possible to analyze the linearity (attribute number I). Therefore, it is necessary that $\gamma_2 = 0$. The variable S_i is a measure of asset risk that is not deterministically related to β_i ; in this sense, attribute number II can be evaluated from $\gamma_3 = 0$, although this parameter can vary stochastically over time. From condition III above, the sign of γ_{1t} is expected to be positive.

Empirically it has been shown that market risk is a determining factor in the pricing of financial assets. However, the CAPM model has been heavily criticized to the extent that it assumes that the asset's market risk explains the total expected return. Some empirical work shows that β^i as the only measure of risk is insufficient to explain the market's risk structure. This would precisely imply that attribute II described above is not fulfilled.

The CAPM has resulted in multiple models that seek to analyze the existence of other risk factors as determinants of the price of assets. The main variables used are firm size, leverage, market value to book value, market value to dividend value, returns in previous periods, and liquidity (Altay, 2019).

This paper focuses on one of the most critical risk factors due to its importance for the market and its analysis difficulty; this risk factor is liquidity. Empirically, there are multiple methodologies to evaluate the impact of liquidity on the return of assets. This paper uses the methodology implemented by Achyara & Pedersen (2005), which consists of adjusting or extending a standard CAPM model disaggregating the risk factors of illiquidity. These models have been referred to as LCAPM in the literature. Several studies in different markets have shown the predictive superiority of the LCAPM model over the CAPM model (Among others, Millares-Quiros, 2017; Acharya & Pedersen, 2005).

The theory behind the LCAPM model assumes that transaction costs affect agents' investment decisions through the demand for a higher return on assets, which intuitively seems logical. When comparing developed markets

with emerging markets, it is also evident that liquidity analysis is fundamental. For example, financial markets in emerging countries have lower trading and higher transaction costs when compared to more developed markets.

4.2 LCAPM Model

$$E(r_t^i - r_t^f - c_t^i) = E(r_t^M - c_t^M - r_t^f) * \beta^i \tag{5}$$

$$E(r_t^i - r_t^f) = E(c_t^i) + E(r_t^M - c_t^M - r_t^f) * \beta^i \tag{6}$$

Where,

$$\beta^i = \frac{Cov(r_t^i - c_t^i, r_t^M - c_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)} \tag{7}$$

The variable c_t^i corresponds to the illiquidity cost of asset i in period t , and the variable c_t^M corresponds to the cost of market illiquidity in period t . The cost of illiquidity can be intuitively understood as the transaction costs associated with the asset or the market. The next chapter develops the liquidity measure, the reasons, and the implications of using it. Equation (6) tells us that the premium or excess expected return of asset i equals the illiquidity cost of asset i plus the market's excess return adjusted for the risk factor associated with asset i . The risk factor β^i can be broken down into four elements, three of which represent each of the channels through which liquidity can affect the price of assets:

$$\beta^i = \underbrace{\frac{Cov(r_t^i, r_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)}}_{\beta^{1i}} + \underbrace{\frac{Cov(c_t^i, c_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)}}_{\beta^{2i}} - \underbrace{\frac{Cov(r_t^i, c_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)}}_{\beta^{3i}} - \underbrace{\frac{Cov(c_t^i, r_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)}}_{\beta^{4i}} \tag{8}$$

Where,

$$\beta^{1i} = \frac{Cov(r_t^i, r_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)} \tag{9}$$

β^{1i} is the variable of interest in the traditional CAPM model. It measures the relationship between the return of asset i and the market return. As mentioned in the previous section, a positive sign is expected for this beta. A positive sign implies that the market risk captured by β^{1i} increases the premium demanded on the expected return of asset i , according to equation (6). $\beta^{1i} > 1$ indicates that asset i presents a risk higher than the average market risk.

$$\beta^{2i} = \frac{Cov(c_t^i, c_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)} \tag{10}$$

β^{2i} represents the co-movements between the illiquidity costs of asset i and the illiquidity costs of the market. This parameter is expected to have a positive sign because investors would be willing to receive a lower return on assets that maintain acceptable levels of liquidity when the overall market is illiquid (Cochrane, 2001). A positive sign implies that the liquidity risk captured by β^{2i} increases the premium demanded on the expected return of asset i , according to equation (6). In this sense, when the covariance between the illiquidity cost of asset i and the illiquidity

cost of the market is positive, the investor will demand an additional return premium that compensates for keeping in his portfolio assets that do not help diversify the liquidity risk. This beta is known in the literature as communal liquidity.

$$\beta^{3i} = \frac{Cov(r_t^i, c_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)} \quad (11)$$

β^{3i} represents the relationship between the return of asset i and market liquidity. A negative sign is expected as an investor is willing to accept a lower return in all future scenarios for those assets that generate higher returns when the market's illiquidity increases. A negative sign implies that the liquidity risk captured by β^{3i} reduces the premium demanded on the expected return of asset i , according to equation (6). According to Pastor & Stambaugh (2003), assets whose returns are susceptible to market liquidity are riskier. Therefore, investors are unwilling to keep illiquid assets in their portfolios unless higher returns offset this.

$$\beta^{4i} = \frac{Cov(c_t^i, r_t^M)}{Var(r_t^M - c_t^M)} \quad (12)$$

β^{4i} represents the relationship between the illiquidity cost of asset i and the return of the market. A negative sign is expected as an investor would accept a lower return on those assets that can be quickly sold at a low cost without affecting the price when markets are down. A negative sign implies that the liquidity risk captured by β^{4i} reduces the premium demanded on the expected return of asset i , according to equation (6). For Achyara & Pedersen (2005), the possibility of liquidating investments quickly, without affecting their price, is desirable for investors, especially when the market is down. Therefore, they are willing to pay a premium for this feature.

From equation (6) and disaggregating risk factors, the following model is obtained:

$$E(r_t^i - r_t^f) = E(c_t^i) + E(r_t^M - c_t^M - r_t^f) * (\beta^{1i} + \beta^{2i} + \beta^{3i} + \beta^{4i}) \quad (13)$$

$$E(r_t^i - r_t^f) = E(c_t^i) + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{2i} + \lambda_t \beta^{3i} + \lambda_t \beta^{4i} \quad (14)$$

Where,

$$\lambda_t = E(r_t^M - c_t^M - r_t^f) \quad (15)$$

This model assumes that the market premium λ_t is constant for all stocks. The aggregate effect of liquidity risk on the return of assets is equivalent to $\beta^{5i} = \beta^{2i} + \beta^{3i} + \beta^{4i}$. Aggregate systematic risk can be defined as $\beta^{6i} = \beta^{5i} + \beta^{1i}$. Equation (13) implies that the premium on the return of asset i is given by (i) the illiquidity cost of asset i , (ii) the market risk of asset i versus market performance, and (iii) liquidity risk (measured through its three dimensions) versus market performance. The LCAPM model can then be summarized in the following equation:

$$E(r_t^i - r_t^f) = E(c_t^i) + \lambda_t \beta^{6i} \quad (16)$$

5 Methodology

The methodology developed by Acharya & Pedersen (2005) will be used; this methodology has the advantage of breaking down liquidity into three individual but related risk factors. The Amihud (2002) measure will be used as a liquidity measure. As an estimation methodology, the procedure of Fama & McBeth (1973) will be implemented in two stages.

5.1 Data

A database with the leading shares traded on the Colombian Stock Exchange (BVC) between 2010 and 2019 is developed to estimate the LCAPM model. Given the above, an unbalanced data panel will be used. The following variables are held daily: (i) Closing share price, (ii) Number of shares outstanding per share, (iii) Volume of shares traded per share, (iv) Market capitalization, (v) market value to book value ratio, and (vi) the momentum index. Below there are descriptive statistics of the sample for 2019.

Table 1. Descriptive statistics 2019 (monthly average)

	Return %	Volume COP MM	Company size COP MM	P/BV	P/BV
AVAL CB Equity	3.66	313.601	27.930.103	1.54	3.49
BBVACOL CB Equity	3.03	524.258	4.665.091	0.95	10.00
BOGOTA CB Equity	3.77	313.601	23.699.215	1.25	4.29
BVC CB Equity	-0.27	313.601	716.161	1.53	-4.09
CELSIA CB Equity	0.82	313.601	4.659.009	1.06	-2.94
CEMARGOS CB Equity	0.74	1.309.891	9.933.704	1.33	-7.78
CLH CB Equity	2.03	188.217	2.538.830	0.50	-15.31
CONCONC CB Equity	2.61	313.601	518.428	0.35	7.18
CORFICOL CB Equity	7.85	93.210	7.258.779	1.08	7.61
ECOPETL CB Equity	2.08	7.974.340	124.650.714	2.25	-7.89
ENKA CB Equity	6.17	5.094.225	109.894	0.28	10.78
ETB CB Equity	0.70	313.601	876.088	0.45	-14.70
EXITO CB Equity	1.37	313.601	6.924.566	0.97	3.33
FABRI CB Equity	1.91	4.836.689	57.029	0.10	-9.70
GEB CB Equity	1.92	2.054.702	19.325.066	1.56	1.22
GRUPOARG CB Equity	0.33	313.601	14.395.038	0.91	-2.74
GRUPOBOL CB Equity	4.54	308.969	4.855.402	0.51	6.57
GRUPOSUR CB Equity	0.49	287.229	19.362.057	0.67	-4.69
ISA CB Equity	2.90	484.890	19.065.894	1.59	14.17
MINEROS CB Equity	4.29	313.601	707.949	0.86	19.84
NUTRESA CB Equity	0.67	153.894	11.775.539	1.38	-2.59
PFAVAL CB Equity	3.66	4.476.863	27.930.103	1.57	3.50
PFBICOLO CB Equity	3.19	519.794	38.200.055	1.54	10.35
PFCORCOL CB Equity	4.46	6.710	7.396.705	0.94	8.08
PFDVVND CB Equity	3.39	114.475	18.057.230	1.54	6.96
PFGRUPOA CB Equity	0.33	313.601	14.395.038	0.73	-8.20
PROMIG CB Equity	3.70	313.601	7.515.149	2.34	3.15
TERPEL CB Equity	0.73	352.900	1.867.114	1.03	0.86

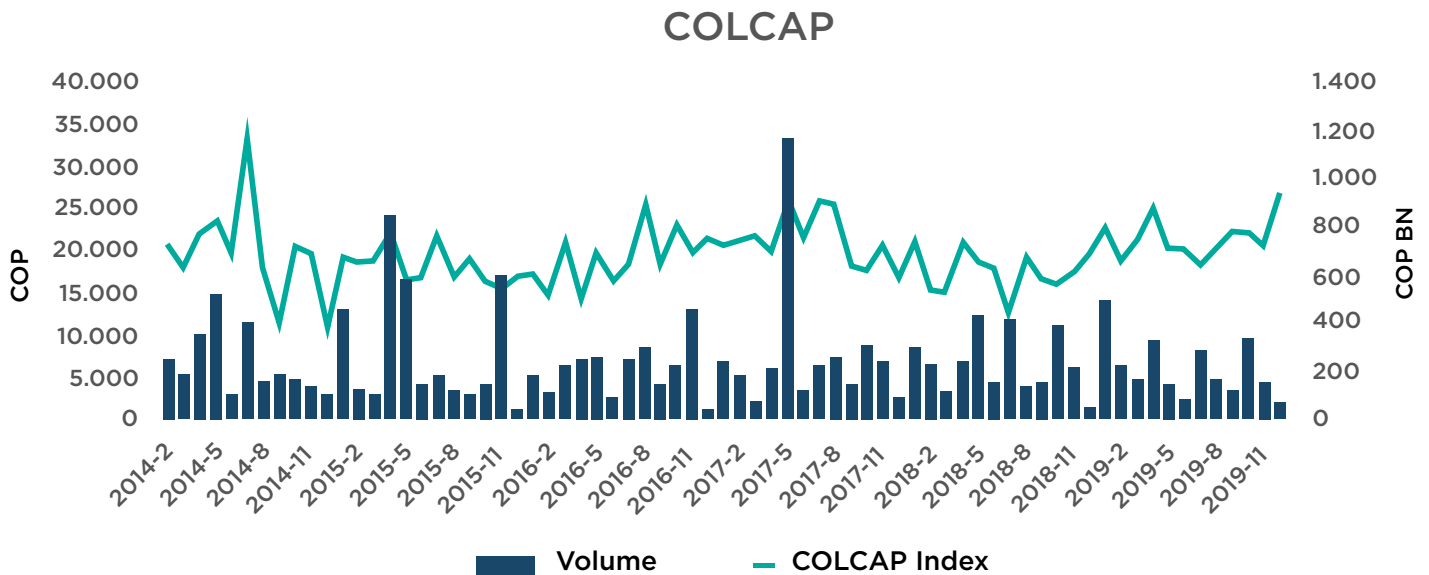
Source: own elaboration with data from Bloomberg.

From shares' daily information, a monthly database was built as an average of the daily results of the shares. This was done to avoid biased results given the noise generated by price variations in short frequencies. Amihud's measure is a ratio of the change in the price against traded volumes; to that extent, the daily changes in prices associated with low volumes of operations would significantly weigh the result.

The following adjustments were made: (i) the highest and lowest centiles in the daily return of the sample shares were eliminated to reduce the noise associated with specific events in the stock prices, (ii) monthly observations when the stock had no changes in price at least 80% of the days were eliminated and (iii) the monthly observations whose volume of the transaction was 0 in more than seven days were eliminated. As a result, there is a sample of 2,328 observations distributed among 29 shares. The above adjustments are made to eliminate observations that present significant changes in the price due to the low volume traded. This can present a problem of selection bias by eliminating observations of less liquid stocks. However, the results detailed in section 6 are maintained when using the database without these settings.

The COLCAP index will be used as a market variable. COLCAP index groups the 20 most relevant shares of the Colombian stock market. The relationship between the average market return and the volume traded for the analysis period is presented below.

Figure 1. COLCAP Index and volume



Source: own elaboration with data from Bloomberg.

5.2 The liquidity measure

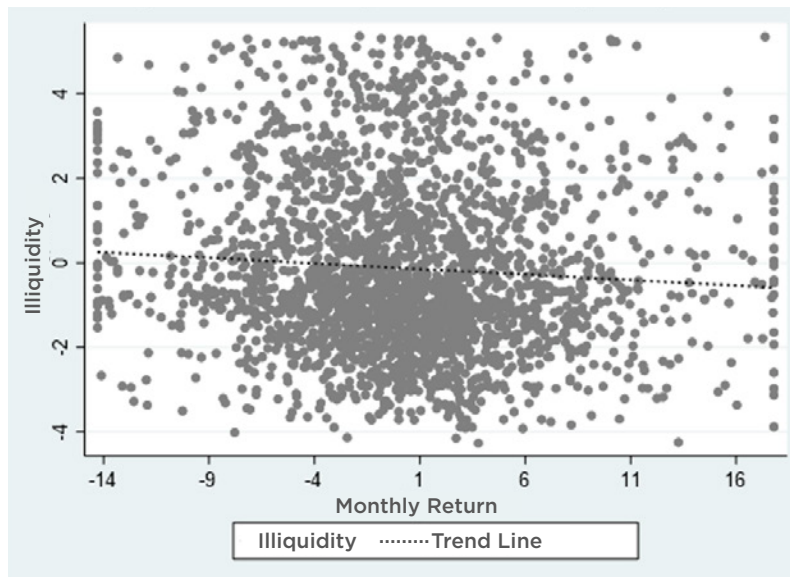
As mentioned above, the liquidity measure to be used will be the one used by Amihud (2002). This variable is defined as follows:

$$ILLIQ_t^i = \ln \left(\frac{1}{d_t^i} \sum_1^{d_t^i} \frac{|R_{td}^i|}{v_{td}^i} \right) \tag{17}$$

Where $ILLIQ_t^i$ corresponds to the illiquidity of asset i in month t , that is, the most liquid assets will have lower values $ILLIQ_t^i$. d_t^i are the days that asset i was traded during month t ; R_{td}^i is the return of asset i on day d of month t , and the variable V_{td}^i corresponds to the volume in pesos traded of asset i on day d of month t . This liquidity variable essentially measures the sensitivity in the price of assets concerning their traded volume. The theory behind this measurement indicates that an asset is illiquid when its price moves significantly in response to low traded volume. The most liquid stocks should have the ability to absorb large trading volumes without affecting their price (Vu et al., 2014). Liquidity and monthly market return were calculated based on the COLCAP index.

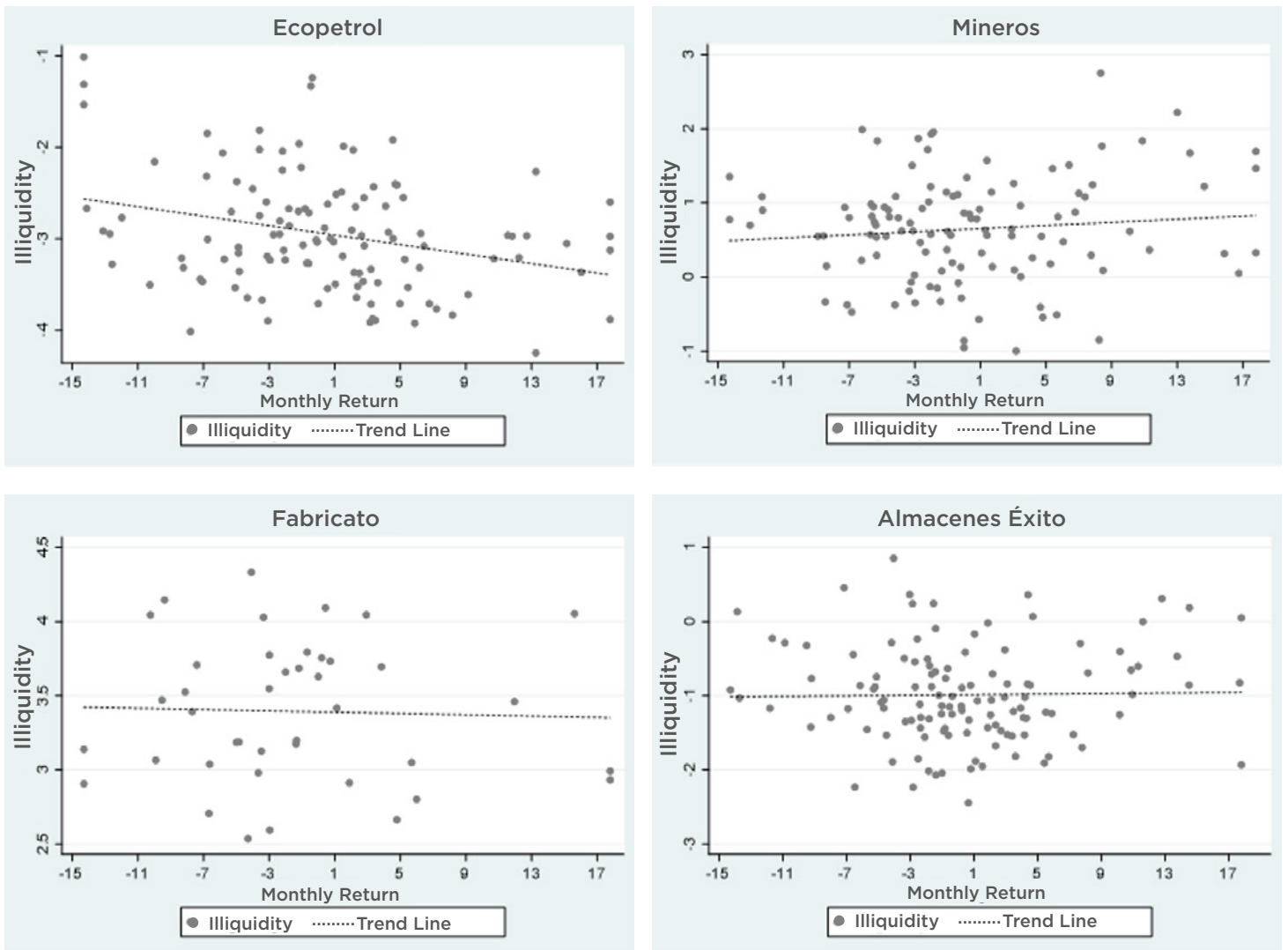
Below, the relationship between return and liquidity of the entire sample is presented. There is no visual evidence of the relationship between these two variables; although the trend line has a negative slope, which would indicate that the most liquid assets are the most profitable, the data dispersion is notorious.

Figure 2. Monthly return vs. liquidity



Source: own elaboration.

Figure 3 presents some examples of Colombian securities. It can be evidenced, for example, that in the case of Ecopetrol, there is a negative trend between return and illiquidity. In contrast, for Mineros, the opposite relationship is observed, suggesting the existence of a premium for illiquidity. However, most of the titles analyzed present a non-existent relationship. As an example, Figure 3 presents the cases of Fabricato and Almacenes Éxito.

Figure 3. Monthly return vs liquidity

Source: Own elaboration.

5.3 Estimation

The estimation methodology will be divided into three steps: i) first, the estimation of liquidity innovations, they will be defined below; ii) the second step is to use the results of step i) to calculate the betas associated with the LCAPM model and, finally, iii) through the methodology proposed by Fama Macbeth (1973) to review the validity of the model.

The length of the Colombian financial market data series and the small number of assets are the main limitations of this methodology. However, according to Basu & Chawla (2010), using very long data series for this exercise can lead to less robust results, given the potential inconsistency of risk factors over time. There must be an adequate balance between having an asymptotic sample and maintaining an adequate predictive level of the variables.

5.3.1 Liquidity innovations

One of the main methodological problems presented by the variables used in this model is persistence over time. This means that a portion of asset liquidity in period t is explained by the liquidity of that asset in periods $t-1, t-2, \dots, t-n$. To the extent that today's liquidity depends on the liquidity of the past, these time series will present residual autocorrelation problems so that they can lead to inefficient estimators. Under the above, the "innovations" of return and liquidity of assets will be used to estimate the model. This correction captures the relationship between temporary liquidity shocks and temporary return shocks.

Liquidity "innovations" refer to exogenous shocks on financial assets that alter their current trend by changing or eliminating persistence over time. That is, innovations represent the component of today's liquidity that is not explained by past liquidity. Temporal shocks are defined as the residues of an autoregressive model. First, the following model is estimated for different orders:

$$c_t^i = \alpha_0 + \alpha_1 c_{t-1}^i + \dots + \alpha_n c_{t-n}^i + u_i \quad (18)$$

Where c_t^i is the illiquidity of asset i in period t . Based on the estimated parameters of the model, the estimated level of illiquidity \hat{c}_t^i for asset i in period t is calculated:

$$\hat{c}_t^i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 c_{t-1}^i + \dots + \hat{\alpha}_n c_{t-n}^i \quad (19)$$

Finally, the difference between the estimated liquidity and the one observed will be the temporary exogenous shock of illiquidity that will be used in the LCAPM model:

$$\hat{u}_i = c_t^i - \hat{c}_t^i \quad (20)$$

From equation (18), it is possible to show that the variable \hat{u}_i is the fraction of liquidity not explained by the liquidity levels of the past. Therefore, \hat{u}_i is the variable of interest. An autoregressive model of order two AR (2) gives the best predictive power. The same procedure is followed for the return of assets.

5.3.2 Model Betas

One of the traditional estimation methodologies for the CAPM model is to use a data panel for the available data series. In these models, β^i is calculated from its definition (that is, the beta was calculated exogenously to the model through equation 2) and then runs against the observed returns to calculate the market premium and determine the consistency of the model. This approach presented two problems: (i) the estimation of risk factors was imprecise, generating errors in their relationship to market returns, and (ii) residues from regressions had familiar sources of deviation, e.g., industry effects (Fama & French, 1993). This invalidated the t statistic in the analysis of the statistical significance of the model.

To solve the first problem, the literature has opted for using portfolios rather than individual assets (Black, Jensen & Scholes, 1972). The use of portfolios significantly reduces standard beta errors due to the reduction of idiosyncratic

risk. Additionally, the use of portfolios has been shown to lead to a more accurate estimation of betas and risk factors (Ang et al., 2008). For Colombia, portfolio construction can be problematic due to the low number of traded companies. However, this methodology was preferred to avoid the risk of having a more significant noise associated with the individual volatility of assets. Ten portfolios of the same number of observations were formed. They were ordered based on the measure of illiquidity of Amihud (2002). Portfolio 1 corresponds to the most liquid observations and portfolio 10 to the most illiquid.

Following Acharya & Pedersen (2005), the betas of the model will be calculated and updated dynamically based on the return and illiquidity information of the previous 12 months. This process aims to reduce the variance of the estimators, avoiding the loss of many degrees of freedom. The betas associated with the portfolios and individual assets were calculated from equations (9) to (12). Subsequently, these values were assigned to each observation, building a new database. Table 2 presents the average of the betas calculated based on ten portfolios created from the liquidity of the observations.

Table 2. LCAPM model Betas

Portfolios	β^1	β^2	β^3	β^4	β^5	β^6
1	0.54697	0.40327	-0.29894	-0.01910	0.08523	0.63220
2	0.65293	0.20462	-0.26591	-0.00866	-0.06995	0.58297
3	0.40242	0.25431	-0.16071	-0.01346	0.08013	0.48255
4	0.43713	0.34502	-0.22132	-0.02075	0.10294	0.54007
5	0.38991	0.28414	-0.18158	-0.00941	0.09314	0.48305
6	0.48900	0.32972	-0.21167	-0.01622	0.10182	0.59082
7	0.41261	0.22127	-0.21117	-0.02039	-0.01029	0.40231
8	0.34882	0.46738	-0.14048	-0.01503	0.31186	0.66068
9	0.36985	-0.01240	-0.19788	-0.02151	-0.23179	0.13805
10	0.23913	0.33296	-0.22054	-0.03535	0.07706	0.31619

Source: Own elaboration.

The signs of betas are consistent with those expected according to the literature. β^{5i} captures the aggregate effect of liquidity on asset returns; its positive sign would indicate that investors seek to obtain a higher return when the illiquidity cost of the asset is higher. This is consistent with the results of Fernandez & Vasquez-Tejos (2020) and Agudelo (2010) for Colombia. On the other hand, it is contrary to that found by Taborda & French (2017), who find a negative relationship between illiquidity and expected return.

5.3.3 Validity of the LCAPM model

The estimation of the LCAPM model is carried out through a cross-sectional estimation following the methodology of Fama & MacBeth; this has the advantage that it is possible to use all available observations by not requiring a balanced data panel. Following Achyara & Pedersen (2015) and Lee (2011), different combinations of betas are used in multiple model specifications to help understand the channels through which liquidity can act. A series of model specifications without control variables will be estimated, and subsequently, the controls will be included. The equations to be estimated without control variables are as follows:

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} \quad (21)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{2i} \quad (22)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{3i} \quad (23)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{4i} \quad (24)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{5i} \quad (25)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{6i} \quad (26)$$

Where $E(r_{t+1}^i - r_{t+1}^f)$ is the expected return premium of the asset i . From β^{1i} to β^{6i} , they are the risk factors defined in section 4. Equations 21 to 24 mitigate the multicollinearity effects between betas and 25 to 26 allow us to assess the combined effects of all betas and the aggregate effect of liquidity risk and systematic risk.

The same equations from 21 to 26 are used in a second specification, including the traditional controls observed in the literature. In this case, the ratio price to book value (p/bv), company size (mkt_cap), and “*momentum*” (mom) were used.

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (27)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{2i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (28)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{3i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (29)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{4i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (30)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{1i} + \lambda_t \beta^{5i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (31)$$

$$E(r_{t+1}^i) = r_{t+1}^f + c_{t+1}^i + \lambda_t \beta^{6i} + \alpha_1 mom_t + \alpha_2 \frac{p}{bv_t} + \alpha_3 mkt_cap_t \quad (32)$$

The daily ratio of price to book value was obtained from Bloomberg. This indicator tells us about the relationship between the accounting price of the shares and their market value. It can indicate whether the market is overvaluing or undervaluing a stock and gives a perspective of the growth that agents expect from that financial asset. The variable “*momentum*” was obtained from Bloomberg. This indicator shows the strength in stock price trends. Finally, the company’s size was calculated as the natural logarithm of the stock’s market capitalization. For the computation of these variables in the portfolios, a weighted average was calculated based on market capitalization. Below is the monthly average of the controls used per portfolio for the entire analysis period.

Table 3. Summary of control variables

Portfolios	Return %	Momentum	P / BV	Company Size COP MM
1	0.72563	2.1114	2.1834	51,857,277
2	0.92576	4.7373	1.8467	30,308,100
3	0.29631	-0.0518	1.7308	14,190,872
4	0.75517	1.8698	1.5981	12,693,898
5	-0.35306	0.2863	1.6189	9,814,527
6	0.55381	0.9065	1.6701	8,574,501
7	-0.67388	-3.2262	1.2080	7,506,503
8	0.03378	-3.1431	1.6709	12,500,364
9	-0.01851	-1.1169	1.2078	3,686,033
10	-0.76555	-0.7624	1.6109	2,851,776

Source: own elaboration with data from Bloomberg.

From Table 3, there is a positive relationship between portfolios and the variables “*momentum*” and ratio price to book value. On average, more liquid portfolios (1 to 5) have a higher value of momentum and price to book value than more illiquid portfolios (from 6 to 10). This would seem to be showing that the best-performing stocks have a lower illiquidity index, according to Amihud (2002).

6 Empirical results

Twelve models were run, the six models specified in the previous section, with and without control variables. Table 4 presents the results of the models without controls. The traditional beta coefficient of the CAPM model (β^1), the risk factor associated with market risk, is the only coefficient statistically significant in all models. On the other hand, models 22 to 24, in which the risk factors associated with liquidity were included individually, and model 25, in which the global measure of liquidity was included, allow us to conclude that liquidity is not being statistically decisive in the definition of the prices of financial assets in the Colombian stock market. Finally, model 26 presents a measure of systematic risk that is statistically significant because it includes the weight of market risk. Table 5 presents the results with the controls discussed in the previous section.

Table 4. Estimates without control variables

Variable	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
β^1	4.2824*** (1.1232)	4.4351*** (1.1019)	4.5629*** (1.516)	4.0387*** (1.2175)	4.5252*** (1.4193)	
β^2		.8208 (1.0594)				
β^3			.0884 (.2868)			
β^4				9.7776 (19.0953)		
β^5					-.045 (.2542)	
β^6						.5797*** (.1846)
_cons	-1.3999*** (.5009)	-1.7204*** (.6351)	-1.3307** (.5446)	-1.118 (.7697)	-1.3906** (.5874)	-1.1959** (.5909)
Obs	2328	2328	2328	2328	2328	2328
R-squared	.0768	.1484	.1296	.1366	.1272	.059

Standard errors in parentheses

*** p<.01, ** p<.05, * p<.1

Table 5 shows results consistent with Table 4. Of the risk factors, only the factor associated with market risk has statistical relevance. Liquidity risk factors are not having an impact on the model. Concerning the control variables, it can be said that they significantly improve the R^2 of the models. However, only the variable “*momentum*” is statistically significant in all proposed specifications. This is in line with Lee & Swaminthan (2000), who found that “*momentum*” can affect traded volume without having anything to do with liquidity. The control variables of company size and price to book value ratio are not statistically significant.

Table 5. Estimates with control variables

Variable	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)
β^1	3.28772** (1.27303)	3.45559*** (1.30430)	3.13442* (1.77058)	2.94917** (1.43858)	3.18722* (1.70414)	
β^2		0.15388 (1.06749)				
β^3			0.04529 (0.32034)			
β^4				2.58325 (23.21498)		
β^5					-0.03318 (0.29513)	
β^6						0.33898* (0.20036)
Comp. Size	0.14099 (0.11759)	0.12430 (0.12137)	0.19807 (0.12774)	0.22473* (0.13433)	0.20082 (0.13198)	0.15763 (0.12354)
Momentum	0.04570** (0.01975)	0.04389** (0.01690)	0.04870** (0.01943)	0.04459** (0.01925)	0.04890** (0.01990)	0.03083** (0.01278)
P/VB	-0.10472 (0.16646)	-0.06802 (0.18033)	-0.10455 (0.17866)	-0.23726 (0.22100)	-0.12170 (0.18548)	-0.04184 (0.17227)
_cons	-3.10147* (1.66366)	-3.00653* (1.66492)	-3.83012** (1.76565)	-4.01527** (2.00370)	-3.88415** (1.83829)	-2.94461 (1.77902)
Obs	2328	2328	2328	2328	2328	2328
R-squared	0.35779	0.40617	0.40658	0.41067	0.40767	0.35651

Standard errors in parentheses

*** p<.01, ** p<.05, * p<.1

In summary, it is not possible to demonstrate the predictive superiority of the LCAPM model over the traditional CAPM model. This section shows that liquidity risk is not a determining factor in stock prices in Colombia and, therefore, in stock returns. These results join those of Lee (2011) and Leirvik, Fiskerstrand, & Fjellvikas (2017), in the extent that they do not find a relationship between return and liquidity for underdeveloped stock markets.

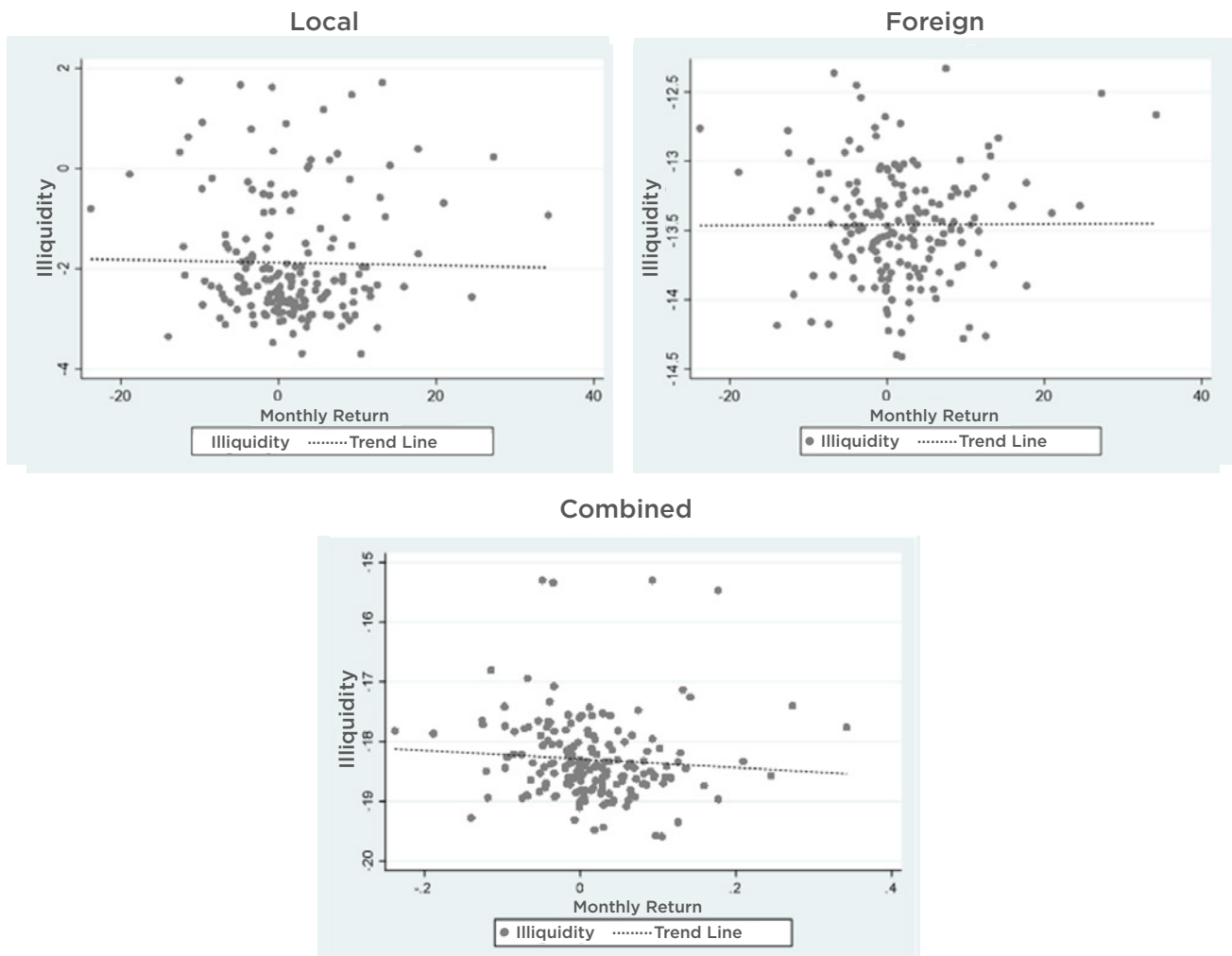
7 Possible explanations

A first feasible explanation may be so-called communal liquidity. According to Röttger (2013), a significant portion of the liquidity changes in the Netherlands is explained by the communal liquidity of global markets, in particular European ones. Being a small financial market, the Colombian stock market can also be affected by the liquidity of international markets. It is important to note that some of the most relevant Colombian stocks are also traded in much more developed markets.

For example, the shares of companies such as Bancolombia, Ecopetrol, and Grupo Aval are traded in the United States through the so-called “*American Depositary Receipt*” (ADR). These mechanisms have a favorable impact on the development of emerging markets. However, they have harmed the local stocks that do not seek to be listed in another financial market. The market capitalization and the relative volume traded (“*turnover*”) of these stocks falls considerably compared to those that do make use of ADRs (Karolyi, 2004).

Figure 4 shows the performance of Bancolombia stock using all available observations from the sample. It is evident that the security’s liquidity, both in the local and foreign markets, seems to be having no relationship with the return. However, when using the combined volume of both markets, a negative trend between return and illiquidity becomes evident.

Figure 4. Illiquidity vs. return Bancolombia



Source: Own elaboration.

The preceding seems to indicate that there may be a relationship between liquidity and the return of these assets but that its analysis is only correct using the volume information of both markets and not only the Colombian one. An interesting extension of the LCAPM model could include a development that allows analyzing these assets traded in more than one market.

Batten & Vo (2014) presents a second possible explanation. They say that, given the scarcity of this type of financial asset to invest in emerging markets, the benefit of diversifying among these few assets outweighs liquidity concerns. According to this argument, investors can overlook the illiquidity of an asset when the advantages of diversifying by participating in markets not sufficiently integrated into international financial markets are high. In any case, the liquidity analysis must be done relative to the Colombian market since the assets held as liquids locally can be illiquid compared to assets from abroad.

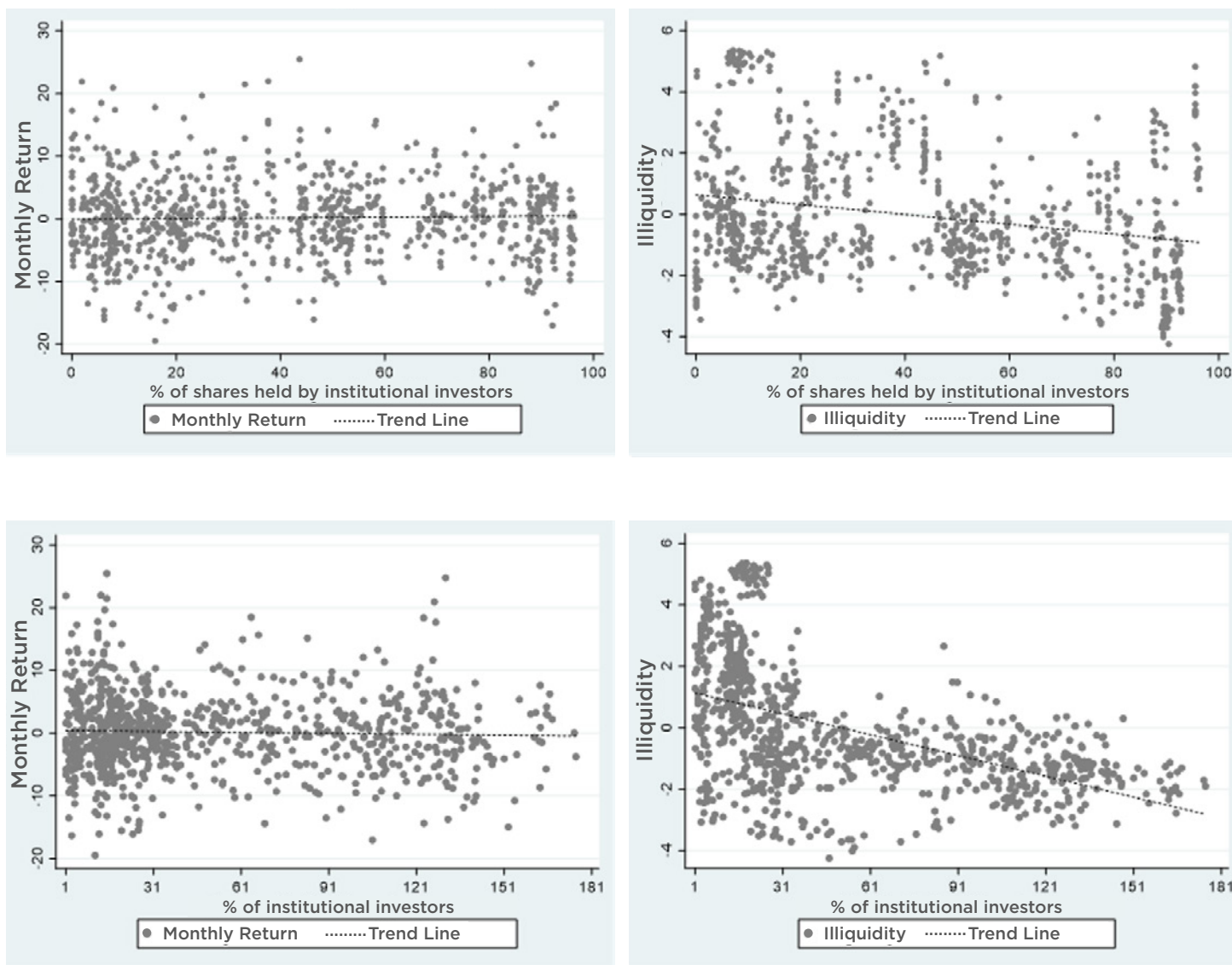
This may be relevant for Colombia to the extent that the leading investors are pension funds, as there are few financial instruments in the local market to meet their regulatory quotas. Additionally, these investors are looking for instruments with long-term maturities available in the debt market more than in the equity one. Future research would be worthwhile to analyze pension funds' role in the liquidity of Colombia's equity and fixed income markets.

Finally, in French & Taborda (2018), an additional explanation is associated with exogenous aspects of the LCAPM model. According to these authors, investors' return and liquidity concerns in emerging markets increase monitoring over companies. The idea is that the number and quality of investors impact the monitoring and performance requirements for traded companies, which to some extent tends to improve long-term financial results. For example, Burkart, Gromb, & Panunzi (1997) reported over-monitoring by institutional investors. According to these authors, the return-liquidity ratio will be affected to the extent that institutional investors (including the government) are the principal shareholders of public companies. One or a few large investors have more monitoring powers than many small ones; these powers multiply when these few investors are institutional investors.

The above point is relevant to Colombia because the leading investors of public companies are institutional investors. For example, in the case of Ecopetrol, the largest and most liquid company in the Colombian financial market, it has maintained the participation of more than 90% of institutional investors, with the Colombian government being the largest shareholder. According to the theory expounded in Burkart, Gromb, & Panunzi (1997), these types of companies are subject to a strong level of monitoring, which translates into better long-term financial returns regardless of the liquidity of the asset.

The number of institutional investors and the percentage of shares held by institutional investors were reviewed for the leading stocks of the Colombian stock market. Figure 5 shows the relationship between these variables and liquidity and return on assets for the period analyzed. Graphically, there is no evidence of any relationship between the return on assets and institutional investors' variables. On the other hand, there is a negative relationship between the variables above and illiquidity, which is more marked for the number of institutional investors. In other words, the greater the participation of institutional investors, the greater the liquidity of the securities traded. In contrast, it could not be claimed that institutional investors improve asset returns through increased monitoring.

Figure 5. Impact of institutional investors



Source: Own elaboration.

Below, the averages of these variables grouped in the portfolios defined in the methodology section are presented. Table 6 shows that, on average, the assets with the highest monthly returns tend to have a higher percentage of shares held by institutional investors and a more significant number of institutional investor shareholders.

Table 6. return and institutional investors

Portfolios	# Of institutional investor	% Of shares held by institutional investors	Return
1	45.9	49.16668	0.72563
2	89.1	37.59289	0.92576
3	67.6	35.82816	0.29631
4	63.2	30.66865	0.75517
5	52.0	44.36477	-0.35306
6	55.1	19.85448	0.55381
7	29.9	37.95093	-0.67388
8	19.4	38.14938	0.03378
9	8.8	34.83968	-0.01851
10	7.1	10.31467	-0.76555

Source: Own elaboration.

By including the variables of institutional investors as controls to the estimates of equations (21) to (32), the coefficients are not statistically significant. Therefore, it is not possible to conclude that the participation of institutional investors in the Colombian stock market has any impact on the return of assets. It is not possible to validate the theory of better returns by improving monitoring, explained through institutional investors.

8 Conclusions

This paper manages to answer the question of whether liquidity risk has an impact on the return of financial assets in the Colombian stock market. The Colombian market for 2010-2019 was analyzed using an LCAPM model, which has the advantage of disaggregating liquidity into multiple dimensions. There is no statistical evidence to affirm that the cost of liquidity is relevant in the pricing of financial assets. In contrast, it was possible to prove that the CAPM model is valid in the local market. Likewise, it was evidenced that both liquidity and the return of assets are persistent over time. This means that the liquidity of an asset today can be explained, in some way, by yesterday's liquidity. The same applies to the return of assets.

These results join the literature on emerging and underdeveloped financial markets, where it is evident that the role of liquidity is not as important as it is in developed markets. The literature has documented positive relationships between return and liquidity risk, negative relationships, and null relationships, evidencing the scarcity of analysis in these markets and the need to delve into these issues. For Colombia, these results contribute to the discussion and support the results of Agudelo (2010): for low traded stocks, there is no relationship between return and liquidity. These results are also aligned with those of Lee (2011) and Leirvik, Fiskerstrand & Fjellvikas (2017), in the extent that they do not find a relationship between return and liquidity for underdeveloped stock markets.

Future studies may focus on understanding why liquidity does not have a role in emerging markets, as it does in developed markets. This paper presents an approach to aspects that can potentially affect the channels of liquidity transmission and the return of financial assets; these aspects are relevant to understanding the Colombian stock market and, in general, implementing measures that help the development of the local capital market. The development of these hypotheses may be essential extensions of this work. The following are hypotheses regarding the low incidence of liquidity risk in the local market:

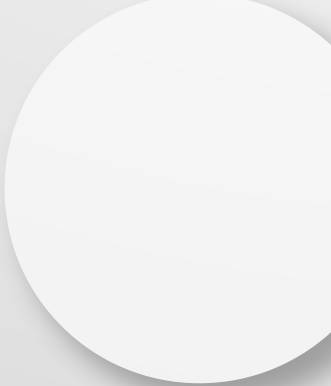


1. The number of assets available in the Colombian stock market, as investors can value a diversified portfolio more than mitigate liquidity risk.
2. The role of institutional investors; the return on assets is expected to increase due to monitoring without necessarily affecting liquidity. For the study period, it was not possible to corroborate this hypothesis.
3. The impact of liquidity from other stocks markets on the return of the local stock market.

9 Bibliography

- Acharya, V. V., & Pedersen, L. (2005). Asset pricing with liquidity risk. *Journal of Financial Economics*.
- Agudelo, D. (2010). Liquidez en los mercados accionarios colombianos: cuánto hemos avanzado en los últimos 10 años. Documentos de trabajo Economía y Finanzas. Centro de investigaciones económicas y financieras. Universidad EAFIT.
- Aitken, M. and Comerton-Forde, C. (2003) How Should Liquidity Be Measured? *Pacific-Basin Finance Journal*, 11, 45-59.
- Altay, E. & Calgici, S. (2019) Liquidity adjusted capital asset pricing model in an emerging market: Liquidity risk in Borsa Istanbul. *Borsa Istanbul Review*.
- Amihud, Y. (2002). Illiquidity and stock returns: Cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1991). Liquidity, Asset Prices, and Financial Policy. *Financial Analyst Journal*, 47, 56-66.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (2008). Liquidity, the value of the firm, and corporate finance. *Journal of Applied Corporate Finance*, 20(2), pp 32-45.
- Ang, A., Liu, J., & Schwarz, K. (2008). Using Stocks or Portfolios in Test of Factor Models.
- Batten, J.A., and Vo, X.V. (2014) Liquidity and Return Relationships in an Emerging Market. *Emerging Markets Finance and Trade*, 50, 5-21.
- Bekaert, G., Harvey, C. & Lundblad, C. (2007) Liquidity and expected returns: Lessons from emerging markets. *Review of Financial Studies*.
- Burkart, M., Gromb, D. and Panunzi, F. (1997) Large Shareholders, Monitoring, and the Value of the Firm. *The Quarterly Journal of Economics*, 112, 693-728
- Burbano, A. (1997) El modelo CAPM en Colombia. Bogotá, Colombia. Universidad de los Andes.
- Banz, R. W. (1981). The relative efficiency of various portfolios: Some further evidence: Discussion. *The Journal of Finance*.
- Cheriyan, N. K. & Lazar, D. (2017). Liquidity-adjusted Capital Asset Pricing Model in Indian Stock Market. *SCMS Journal of Indian Management*.

- Chordia, T., Roll, R., & Subrahmanyam, A. (2000). Commonality in liquidity. *Journal of Financial Economics*, 73, 3-28.
- Cooper, S. K., Groth, J. C., & Avera, W. E. (1985). Liquidity, Exchange Listing, and Common Stock Performance. *Journal of Economics and Business*, 37, 19-33.
- Estrada, J. (2003) Mean-Semivariance Behavior II: The D-CAPM. Research paper. IESE Business school.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*.
- Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *The Journal of Finance*.
- Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973). Risk, return and equilibrium: Empirical tests. *Journal of Political Economy*.
- Fernández, P. y Vásquez-Tejos, F. (2020) Liquidity risk and stock return in latin American emerging markets. *Revista SCIELO*
- French, J & Taborda R. (2018). Disentangling the relationship between liquidity and returns in Latin America. *Global Finance Journal*.
- Goyenko, R. Y., Holden, C. W., & Trzcinka, C. A. (2009). Do liquidity measures measure liquidity? *Journal of Financial Economics*, 92, 153-181.
- Hernández-Barros, R. (2015) Los riesgos de las entidades aseguradoras en el marco del Enterprise Risk Management (ERM) y el control interno.
- Karolyi, Andrew. (2004) The role of American Depositary Receipts in Development of Emerging Equity Markets. *The review of Economics and statistics*. The MIT Press.
- Korajczyk, R. A., & Sadka, R. (2008). Pricing the commonality across alternative measures of liquidity. *Journal of Financial Economics*, 87, 45-72.
- Kurman, G. & Kurman, A. (2019) Liquidity-adjusted CAPM – An empirical analysis of Indian stock market. *Cogent Economics & Finance*.
- Kyle, A. S. (1985). Continuous auctions and insider trading. *Econometrica*.
- Lee, K. H. (2011). The world price of liquidity risk. *Journal of Financial Economics*, 99(1), 136–161.
- Leirvik, Fiskerstrand y Fjellvikas (2017). Market liquidity and stock returns in the Norwegian stock market. *Finance Research Letters*.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*. Vol 47, pp. 13-37.
- Liu, W. (2006). A liquidity-augmented capital asset pricing model. *Journal of Financial Economics*.

- Martínez, C. (2001) Las modernas teorías financieras. Examen de sus aplicaciones a la valoración de sociedades anónimas que cotizan en bolsa. Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa.
- Miralles-Quiros, M., Miralles-Quiros, J. L., & Oliveira, C. (2017). The role of liquidity in asset pricing: The special case of the Portuguese stock market. Journal of Economics, Finance & Administrative Science.
- Röttger, D.W. (2013). The pricing of liquidity risk around the world. Tilburg School of Economics and Management.
- Pástor, L., & Stambaugh, R. F. (2003). Liquidity risk and expected stock returns. Journal of Political Economy, 111, 642-685.
- Perold, André F. (2004) "The Capital Asset Pricing Model" Journal of economic perspectives, Volume 18, Número 3.
- Pritsker, M. (2003). Large investors: Implications for equilibrium asset returns, Shock absorption and liquidity, mimeo, Board of Governors of the federal reserve System.
- Sadka, R. (2006). Momentum and Post-Earnings Announcement Drift Anomalies: The Role of Liquidity Risk. Journal of Financial Economics, 80, 309-349.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. The Journal of Finance.
- Zorrilla, J. P. (2005) Globalización, incertidumbre y riesgo. Intangible Capital, 1(9), 1-17.



Dolarización de pasivos bancarios y el rol de Basilea III en Colombia

**Alfredo
Villca Condori**

Resumen

¿Qué tan importante es la dolarización de pasivos bancarios y que papel juega la política de Basilea III en la estabilización del sistema bancario y de la economía real? Para abordar esta cuestión se desarrolla un marco DSGE de economía pequeña abierta con un sector bancario y con fricciones financieras. Los bancos recaudan fondos en los mercados de capitales internacionales en forma de deuda externa, la cual viene denominada en dólares. Ante un shock de commodities, la dolarización de pasivos amplifica las expansiones del sistema bancario y de la economía real, en comparación con la economía que ignora este mecanismo financiero. Sin embargo, la aplicación de la política contracíclica de Basilea III, basados en requisitos de capital, amortigua los impactos de los shocks de commodities. Además, este tipo de políticas permite obtener mayores ganancias de bienestar social. En síntesis, la política de Basilea III es cuantitativamente importantes para la estabilización macroeconómica y financiera.

JEL Classification: E32, E44, F32, F41.

Keywords: Ciclos económicos, precios de commodities, economía pequeña abierta, hojas de balances bancarios, dolarización de pasivos, Basilea III.

*Es candidato a Ph.D. en economía de la Universidad EAFIT. Medellín - Colombia. E-mail; avill-ca@eafit.edu.co

Dollarization of bank liabilities and the role of Basel III in Colombia

Abstract

How important is the dollarization of bank liabilities and what role does Basel III policy play in stabilizing the banking system and the real economy? To address this question, a DSGE framework of a small open economy with a banking sector and financial frictions is developed. Banks raise funds in international capital markets in the form of external debt, which is denominated in dollars. In the face of a commodity shock, the dollarization of liabilities amplifies the expansions of the banking system and the real economy, compared to the economy that ignores this financial mechanism. However, the application of Basel III countercyclical policies, based on capital requirements, cushions the impacts of commodity shocks. Moreover, this type of policy allows for greater social welfare gains. In summary, Basel III policy is quantitatively important for macroeconomic and financial stabilization.

JEL Classification: E32, E44, F32, F41.

Keywords: Business cycles, commodity prices, small open economy, bank balance sheets, dollarization of liabilities, Basel III.

INTRODUCCIÓN

Cuando la deuda externa de los bancos está denominada en dólares, entonces, un alza de los precios de commodities genera una expansión de los balances bancarios¹, porque la deuda externa bancaria, tras una caída de la tasa de cambio (apreciación de la moneda doméstica) permite financiar los activos bancarios. Esta dinámica tiene importantes implicaciones para la economía real, porque los balances de las empresas también se expanden a través de un incremento de la inversión y del capital financiado con crédito y, teniendo en cuenta la tecnología de producción, el producto crece. Por el contrario, un desplome de los precios de materias primas genera un deterioro de los balances bancarios, debido a que enfrentan un desajuste monetario. En cualquier caso, la política macroprudencial contracíclica, basado en las recomendaciones de Basilea III, permite amortiguar los efectos de los shocks de precios de commodities, debido a que los requerimientos de capital interiorizan los riesgos crediticios y los riesgos de las fluctuaciones de la tasa de cambio.

El papel de los pasivos externos dolarizados en la economía es clásico, de hecho se ha planteado la teoría del “pecado original”, situación en la que los agentes de economías pequeñas no pueden usar moneda doméstica para realizar transacciones en los mercados de capitales internacionales [Gavin and Hausmann (1996), Eichengreen and Hausmann (1999), Calvo and Reinhart (2002) and Eichengreen et al. (2003)]. Esta situación puede generar una alta vulnerabilidad sobre la estabilidad del sistema financiero ante shocks externos. En esta línea, estudios recientes han mostrado que la deuda que adquieren los bancos de economía emergentes en los mercados internacionales se han incrementado con el tiempo y, por lo tanto, también ha aumentado la dependencia de esta deuda en moneda extranjera, particularmente el dólar [Ver, Aldasoro and Ehlers (2018), Durdu et al. (2019), Georgiadis and Zhu (2020), Abraham et al. (2020) and Eren and Malamud (2021)]. El caso particular de Colombia no es ajeno a esta dinámica, debido a que participa activamente en la globalización financiera internacional.

Por otro lado, un amplio espectro de la literatura ha estudiado el rol Basilea III, fundamentalmente para países desarrollados (Ver por ejemplo, De Resende et al. (2016), Aliaga-Díaz et al. (2018), Tomura (2018) y Agenor et al. (2018)). Los resultados de este conjunto de literatura muestran que las recomendaciones de este tipo de políticas permiten estabilizar las variables tanto financieras como reales.

Si bien el sistema bancario colombiano está implementando gradualmente las recomendaciones de Basilea III, no existen (hasta donde sabemos) estudios que permitan determinar la efectividad de esta norma. Esto puede deberse, en parte, ya que la mayoría de los establecimientos bancarios cuentan con un capital (Tier1) por encima de los estándares mínimos propuestos por Basilea III (Asobancaria, 2011) y, por otra parte, esto ayuda a una menor probabilidades de crisis bancarias.

¹En general, una hoja de balance bancario se define como la posición financiera de un banco en un momento del tiempo. Este balance muestra que los activos deben ser iguales a los pasivos más el patrimonio y su monitoreo es importante para la política macroprudencial, que es una herramienta de los organismos de estabilidad financiera en los que participan los Bancos Centrales

En este artículo se investiga y se cuantifica el papel de Basilea III en la estabilidad del sistema financiero y la economía real, en presencia de dolarización de pasivos externos y shocks de commodities. Para lograr este objetivo combinamos métodos empíricos y teóricos. En primer lugar, recopilamos información de un conjunto de variables relevantes para Colombia durante 2000:Q1 - 2019:Q1. Con estos datos se formula y se estima un modelo de Vectores Autorregresivos Estructural (SVAR) para establecer los hechos estilizados. Esto es importante porque sustenta empíricamente la racionalización teórica de los mecanismos de transmisión. En segundo lugar, desarrollamos un modelo de Equilibrio General Dinámico Estocástico (DSGE) para una economía pequeña abierta. El núcleo del modelo se basa en Fernández et al. (2018) que incorpora explícitamente un sector de dotación de productos básicos en la configuración establecida por Mendoza (1991), Correia et al. (1995) y Schmitt-Grohé and Uribe (2003). Extendemos este marco de dos maneras. (i) incorporamos un sector bancario siguiendo el espíritu de Gertler and Karadi (2011), pero suponiendo que estos agentes recaudan fondos, además del mercado doméstico, en los mercados de capitales internacionales. (ii) mostramos explícitamente la relación entre los precios de commodities y la tasa de cambio real. Esta relación es clave en nuestro modelo, porque permite capturar los efectos de los shocks de precios de materias primas sobre los balances de los bancos. Existen dos tipos de fricciones financieras, la cual surge por la existencia de problemas de información asimétrica que enfrentan los bancos con los depositantes. Nuestro modelo es mucho más rico, porque nos permite experimentar diferentes tipos de políticas, entre las que destaca la política macroprudencial de Basilea III.

Los resultados, según ambos tipos de modelo - SVAR y DSGE - sugieren que un crecimiento de los mercados internacionales de materias primas permite que los bancos puedan acceder a mayores recursos externos para financiar el crecimiento del crédito. Este crecimiento genera un incremento del flujo de inversión y del stock de capital y, como consecuencia, el producto transita en su fase expansiva. Bajo ciertas condiciones, la dolarización de pasivos bancarios amplifica la respuesta de las variables respecto a su tendencia.

Por otro lado, y en este contexto, se evalúa el papel de Basilea III en la estabilización de las variables. Este tipo de políticas es interesante porque plantea que los requerimientos de capital son variables en el tiempo y reaccionan a las fases del ciclo económico y el ciclo financiero. Los resultados indican que este tipo de políticas permiten amortiguar los impactos de los shocks de commodities, debido a que frena el crecimiento excesivo del crédito y del producto, pero además, permite generar mayores ganancias de bienestar social expresada en términos de consumo equivalente.

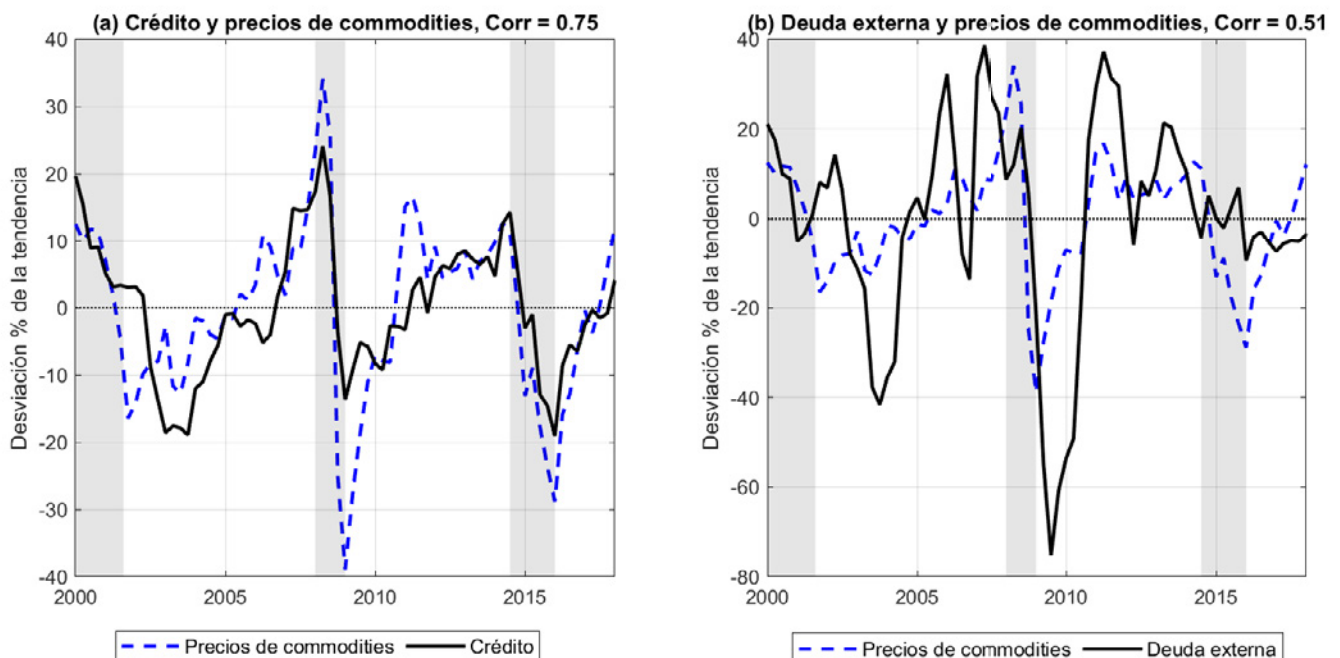
2. Hechos estilizados

2.1. Balances bancarios y precios de commodities

Se recopila información sobre crédito interno, deuda externa bancaria y precios de commodities. De acuerdo a los datos disponibles, se considera el periodo 2000:Q1 - 2019:Q1. El crédito interno corresponde a los activos de los bancos (denominado en moneda doméstica), mientras que la deuda externa son los pasivos de los bancos que adquieren en los mercados de capitales internacionales (denominado en dólares de EEUU). Estos datos fueron obtenidos del Banco de la República de Colombia y constituyen los elementos claves de las hojas de balance de los intermediarios financieros. Finalmente, los precios de commodities corresponden a un índice que agrega tres tipos de precios; agrícola, energía y minería, obtenidos del Banco Mundial.

A continuación, tomando en cuenta estas tres variables, se extraen las desviaciones logarítmicas respecto de la tendencia usando la técnica convencional de Hodrick-Prescott (HP), con $\lambda = 1600$. Luego, el componente cíclico del crédito y de la deuda se correlacionan con el componente cíclico de los precios de commodities. El panel (a) de la **Figura 1** muestra un movimiento procíclico entre los activos de los bancos con los precios de commodities (correlación 75 %), significativos al 5 %. Esto significa que aumentos de los activos bancarios están asociados con aumentos de los precios de commodities y, viceversa, caídas de los activos están relacionados con caídas de los precios de commodities. Por otro lado, el panel (b) de la misma figura también sugiere un co-movimiento entre los pasivos de los bancos con los precios de commodities (correlación 51 %). Estas dos observaciones indican que los shocks de commodities pueden tener efectos potenciales sobre los balances bancarios y este, a su vez, sobre el comportamiento del sistema financiero y la economía real. Para tener una idea más formal sobre el papel de las hojas de balances bancarios en la economía a continuación se estima un modelo empírico.

Figura 1: Crédito interno, deuda externa y precios de commodities



2.2. Modelo empírico

Para explorar formalmente los efectos de los precios de commodities sobre los balances de los bancos y sobre el producto, se formula un modelo de Vectores Autorregresivos Estructural (SVAR). Par ello seguimos las sugerencias de la literatura; Fernández et al. (2017), Zeev et al.

(2017), Drechsel and Tenreyro (2018), Schmitt-Grohé and Uribe (2018) y Caldara et al. (2019).

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_t$$

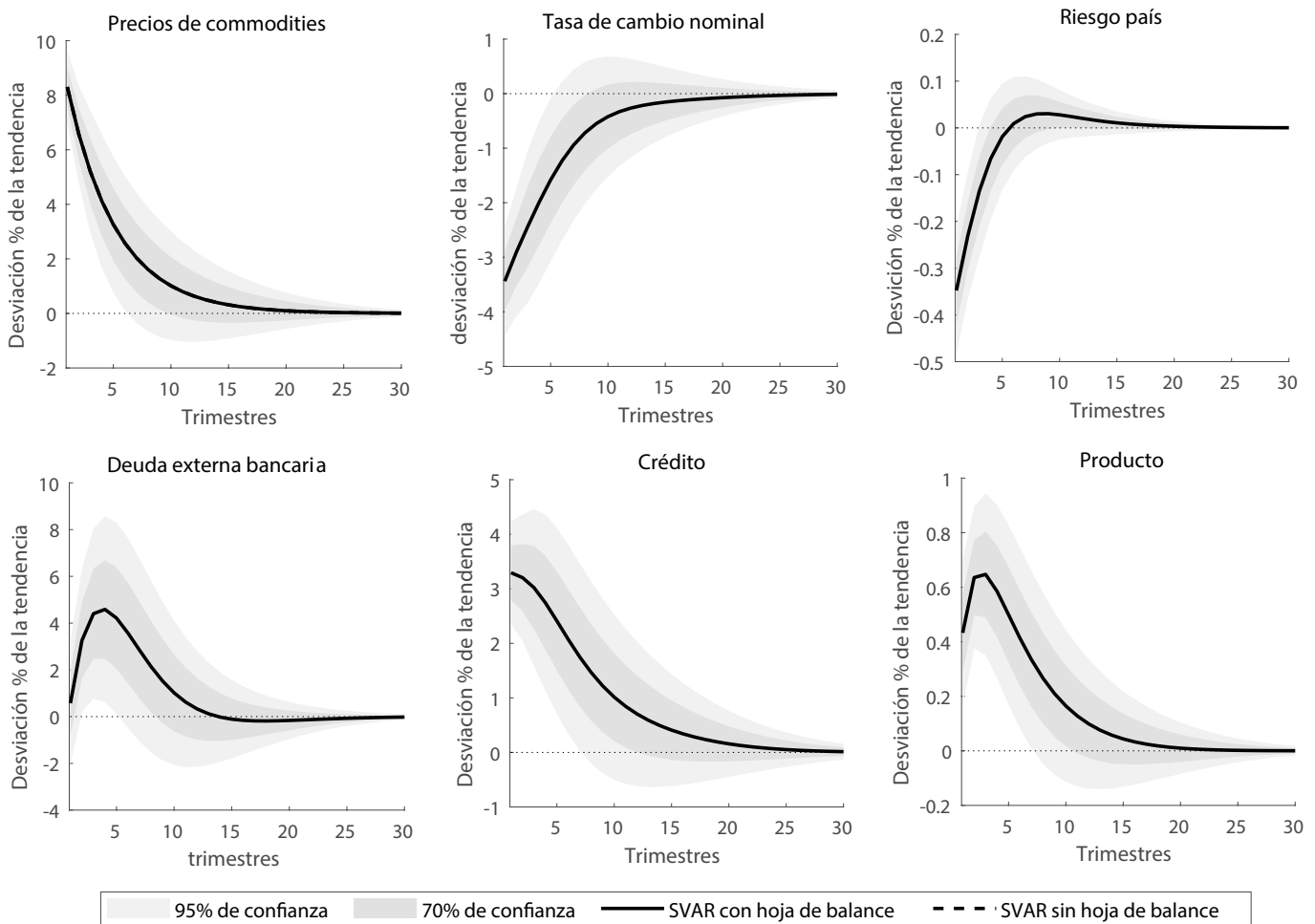
Donde el vector \mathbf{x}_t contiene los componentes de corto plazo de las siguientes variables y en ese orden; precios de commodities (\widehat{p}_t^{com}), tasa de cambio nominal (\widehat{e}_t), riesgo país- capturado por el EMBIG- (\widehat{s}_t), balanza comercial como proporción del PIB (tb_t), deuda externa bancaria (\widehat{edb}_t), crédito interno (\widehat{c}_t) y producto (\widehat{y}_t). La balanza comercial corresponde a una desviación del producto y no de la tendencia [Ver Uribe and Yue (2006), Fernández et al. (2017) y Schmitt-Grohé and Uribe (2018)]. La selección y el orden de las variables están basadas en la literatura que enfatiza el papel de la dolarización de los pasivos externos [Eichengreen and Hausmann (1999), Eichengreen et al. (2003), Céspedes et al. (2004) and Gertler et al. (2007)].

Para estimar el modelo primero escribimos en su forma reducida, $\mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t$, donde $\mathbf{A}_0 \epsilon_t = \mathbf{B} \mathbf{u}_t$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1$. El supuesto de identificación considera que el modelo es recursivo. Esto implica que $\mathbf{A}_0[a_{ij}]$ es típicamente una matriz triangular inferior, es decir $a_{ij} \neq 0$ si $i > j$, $a_{ij} = 0$ si $i < j$ y $a_{ij} = 1$ si $i = j$, por lo tanto, se trata de una historia sobre una determinada variable endógena explicada por aquellos que están “arriba” en el sistema. Un aspecto a destacar es que la economía colombiana es tomadora de precio, lo cual significa que \widehat{p}_t^{com} sigue un proceso autorregresivo de primer orden. De esta forma, la primera fila de la matriz \mathbf{A}_1 son todos ceros, excepto el primer elemento, la cual captura la persistencia de los precios.

Luego de estimar las matrices \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 y \mathbf{B} , se obtienen las impulso respuesta de las variables. Los resultados se observan en la **Figura 2**, los cuales sugieren que un shock de commodities, equivalente a una desviación del 8% respecto a su tendencia, genera efectos positivos sobre el comportamiento sobre el sistema financiero y la economía. En concreto, el incremento sorpresivo de los precios de commodities genera una caída de la tasa de cambio y el riesgo país, los cuales explican el aumento de la deuda externa (1%) y el crédito interno (3,1 %), por consiguiente, el producto se expande hasta un 0,41 % en el momento del impacto.

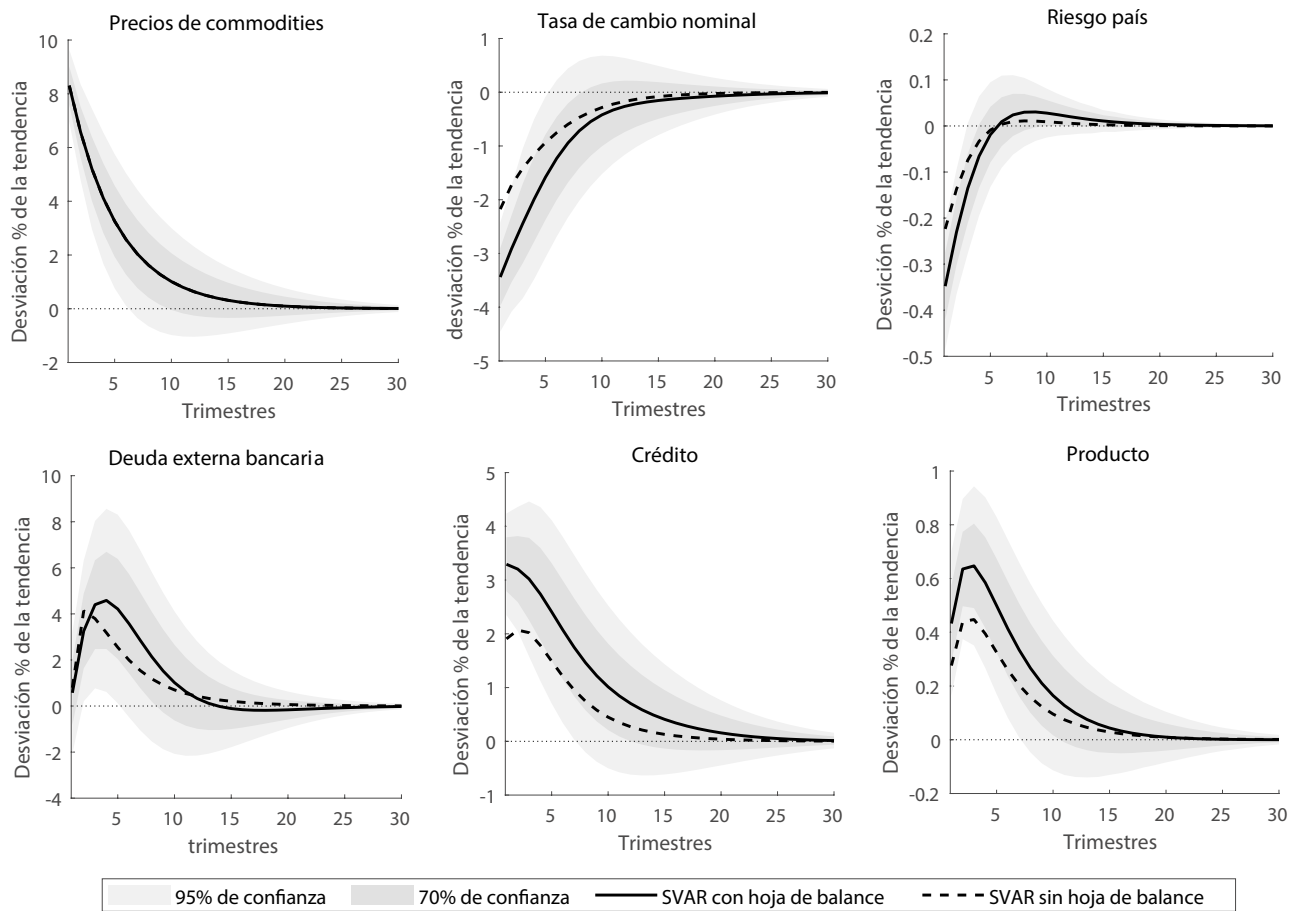
A continuación, para capturar el rol de las hojas de balance bancario, imponemos unas restricciones simples al modelo. Específicamente las restricciones se imponen sobre las matrices \mathbf{A}_0 y \mathbf{A}_1 . Primero, suponemos que los rezagos del crédito \widehat{c}_t y deuda externa bancaria \widehat{edb}_t no tienen efectos sobre el resto de las variables. Esto significa que la quinta y sexta columna de la matriz \mathbf{A}_1 son ceros, sin embargo, tanto \widehat{c}_t como \widehat{edb}_t son explicados por el sistema. Segundo, suponemos que \widehat{c}_t y \widehat{edb}_t no responden a los choques de las materias primas, por lo tanto, los elementos 51 y 61 de la matriz \mathbf{A}_0 son iguales a cero. A este modelo etiquetamos como “SVAR sin hojas de balance” mientras que al modelo anterior etiquetamos como “SVAR con hojas de balance”.

Figura 2: Respuestas de las variables ante un shock de commodities



En la **Figura 3** se observan las funciones de impulso respuestas (línea punteada de color). Los resultados sugieren que los balances bancarios se comportan como un acelerador financiero, lo que significa que en presencia de shocks de commodities, este elementos financiero expande mucho más la economía. Es decir, ante un mismo shock de precios de commodities (8 %) en ambos modelos, las dinámicas de las variables - con movimientos cualitativamente similares muestran diferencias importantes en términos cuantitativos. En particular, el producto reacciona hasta un 0,41 % en el SVAR con hojas de balance y lo hace hasta un 0,21 % en el modelo SVAR sin hojas de balances, lo que significa una brecha del 0,2 %. En la siguiente sección se racionaliza teóricamente este hecho estilizado observado en los datos y cómo la política de Basilea III puede ayudar a mitigar los efectos de los shocks externos.

Figura 3: Modelo SVAR con y sin hojas de balance bancario



3. Modelo

En la economía existen cinco tipos de agentes; hogares, intermediarios financieros (bancos), firmas productoras de bienes, sector de commodities y el resto del mundo. Dentro del hogar, existen dos tipos de miembros; una fracción f son banqueros y la otra fracción $1-f$ son trabajadores. Los banqueros generan dividendos y los devuelven al hogar, mientras que los trabajadores lo hacen con sus salarios. Con el tiempo, un agente puede cambiar entre las dos ocupaciones. Un banquero sigue siendo banquero en el próximo período con probabilidad θ . Así, $(1 - \theta)f$ banqueros salen de la industria financiera y se convierten en trabajadores. Un número similar de trabajadores se convierten, aleatoriamente, en banqueros, de manera que, la proporción relativa de cada agente es constante. A continuación, se desarrolla el comportamiento de los agentes.

3.1. Intermediarios financieros

Los intermediarios financieros, o bancos, ayudan a canalizar fondos de los ahorradores hacia los inversores. Además, participan en la transformación de los vencimientos, poseen activos a largo plazo, los cuales se financian con pasivos de corto plazo. Los intermediarios financieros capturan todo el sector bancario, es decir, los bancos de inversión y los bancos comerciales. Así, existe un continuo de bancos indexados en $j \in [0, 1]$. A finales del periodo t el banco j otorga créditos, $S_{j,t}$, a los productores de bienes a un precio relativo Q_t . Estos créditos son financiados por; patrimonio neto, $N_{j,t}$, depósitos, $D_{j,t}$, que obtienen en los mercados domésticos y deuda externa, $e_t B_{j,t}$, que obtienen en los mercados de capitales internacionales. La característica central del modelo es que la deuda externa viene denominada en moneda extranjera, más específicamente, en dólares. La hoja de balance viene definida por:

$$Q_t S_{j,t} = N_{j,t} + D_{j,t} + e_t B_{j,t} \quad (1)$$

Donde e_t es la tasa de cambio real definida de la siguiente manera:

$$e_t = \frac{\mathcal{E}_t P_t^*}{P_t} \quad (2)$$

En la que \mathcal{E}_t es la tasa de cambio nominal definida como el precio de la moneda foránea expresada en términos de la moneda doméstica, P_t^* son los precios internacionales y P_t son los precios de la economía doméstica.

Los bancos obtienen unos rendimientos reales brutos contingentes, $R_{K,t+1}$, por sus activos. Por otro lado, deben pagar un rendimiento bruto real no contingente, R_{t+1} , a los hogares y a los inversionistas internacionales por adquirir deuda externa, $R_{B,t+1}$. Así, el patrimonio neto viene dada por:

$$N_{j,t+1} = R_{K,t+1} Q_t S_{j,t} - R_{t+1} D_{j,t} - e_t R_{B,t+1} B_{j,t} \quad (3)$$

Al combinar (1) y (3) se observa que la evolución del patrimonio neto depende, fundamentalmente, del diferencial de tasas de interés $R_{K,t+1} - R_{t+1}$ y $R_{t+1} - R_{B,t+1}$. Cuando el rendimiento que obtiene por sus activos es menor a los costos de los depósitos, entonces el patrimonio neto será negativo. Así mismo, cuando el costo de obtener depósitos supera los costos de la deuda externa, el patrimonio neto también será negativo. Por lo tanto, dado el supuesto de racionalidad de los banqueros, se debe cumplir las siguientes restricción de participación, para que sigan operando en la industria financiera.

$$\mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+i+1} (R_{K,t+i+1} - R_{t+i+1}) \geq 0 \quad ; \quad \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+i+1} (R_{t+i+1} - R_{B,t+i+1}) \geq 0 \quad , \quad i \geq 0$$

La primera restricción no es más que la prima de riesgo doméstica, mientras que la segunda es la prima de riesgo externa. En mercados de capitales perfectos, la relación siempre se mantiene con igualdad, es decir $R_{K,t+i+1} = R_{t+i+1}$, en este contexto el modelo colapsa a un modelo RBC estándar y, por lo tanto, los bancos son completamente redundantes. Sin embargo, en presencia de mercados imperfectos, la prima puede ser positiva debido a los límites en la capacidad del intermediario para obtener fondos.

Siempre que se cumplan las restricciones de participación, entonces el banquero seguirá obteniendo fondos en los mercados domésticos y en los mercados internacionales y, por lo tanto, seguirá acumulando activos hasta que abandone la industria. Por lo tanto, el objetivo del banquero es maximizar el valor presente esperado del capital, dada por:

$$V_{j,t} = \max_{\{S_t, D_t, B_t\}} \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \theta)^i \Lambda_{t,t+i+1} N_{j,t+i+1} \quad (4)$$

Donde θ la probabilidad de sobrevivencia en la industria financiera. Debido a que los bancos están financiando sus activos con fondos domésticos y con fondos internacionales, surge un problema de riesgo moral. En la medida que la restricción $\mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+i+1} (R_{K,t+i+1} - R_{t+i+1}) \geq 0$ se cumple, entonces los bancos querrán expandir sus activos indefinidamente con depósitos y deuda externa. Para motivar un límite en su capacidad de hacerlo se presenta un problema de agencia. En primer lugar, los banqueros pueden optar desviar una fracción $\Theta \in (0, 1)$ de los fondos que se obtienen en el mercado doméstico, de manera que $\Theta(D_{jt} + N_{jt})$ representa la cantidad total que se pueden desviar de estos fondos. En segundo lugar, pueden desviar una fracción $\Theta^* \in (0, 1)$ de los fondos que obtienen en los mercados internacionales, $\Theta^* e_t B_{jt}$. Por lo tanto, $\Theta(D_{jt} + N_{jt}) + \Theta^* e_t B_{jt}$ representa la cantidad total de fondos que pueden enajenar. Si se enajenan estos recursos, entonces los bancos incumplen sus obligaciones de deuda con los hogares y con los inversionistas internacionales. Para que los prestamistas, tanto locales como extranjeros, estén dispuestos a suministrar fondos a los banqueros se debe satisfacer que; el valor de los bancos, $V_{j,t}(S_{j,t}, D_{j,t}, B_{j,t})$, debe ser mayor o igual al beneficio de desviar fondos totales, es decir, se debe cumplir la siguiente restricción de incentivos:

$$V_{j,t} \geq \Theta(Q_t S_{jt} + w e_t B_{jt}) \quad (5)$$

Donde, se supone que Θ^* es igual a la fracción de desviar fondos locales más un grado de fricción financiera internacional ω , $\omega > 0$. Es decir, $\Theta^* = \Theta(1 + \omega)$.

El banquero resuelve el problema (4) sujeto a (5), (3) y (1). Usando la ecuación de Bellman y el método de coeficientes indeterminados, la solución sugiere que la expansión de los activos bancarios depende positivamente de su patrimonio neto, pero además, obtener fondos en los mercados internacionales también depende de su capital que actúa como un colateral.

$$Q_t S_{j,t} + \omega e_t B_{j,t} = \phi_t N_{j,t} \quad (6)$$

Donde ϕ_t representa el apalancamiento bancario denido por:

$$\phi_t = \frac{\eta_t}{\Theta - \nu_t} \quad (7)$$

En la que, η_t representa el costo marginal esperado por unidad de depósitos y ν_t representa la ganancia marginal esperada por unidad de activos. Este término está relacionado con la prima de riesgo externa y el grado de fricción internacional, $\nu_t = \omega^{-1}\mu_t$. Estas variables satisfacen lo siguiente:

$$\nu_t = \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Omega_{t+1} (R_{K,t+1} - R_{t+1}) \quad (8)$$

$$\mu_t = \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Omega_{t+1} (R_{t+1} - R_{B,t+1}) \quad (9)$$

$$\eta_t = \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Omega_{t+1} R_{t+1} \quad (10)$$

La relación (8) muestra el diferencial descontado de la tasa de rendimiento de los créditos respecto a los costos de recaudar depósitos. Mientras que (9) representa el diferencial de costos de depósitos respecto a los costos de deuda externa, finalmente, (10) es el valor descontado de los costos por depósitos. La variable Ω_t está compuesto por dos términos; el primero corresponde a la probabilidad de quiebra en la industria financiera $1 - \theta$, mientras que el segundo término corresponde a la suma de los beneficio de la tenencia de activos, $\nu_t \phi$, más los beneficios de una unidad extra de depósitos, η_t , ambos ponderados por la probabilidad de sobrevivencia. En otras palabras, Ω_t es un promedio ponderado de beneficios marginales y viene definida por:

$$\Omega_t = (1 - \theta) + \theta(\nu_t \phi_t + \eta_t) \quad (11)$$

Observe que ν_t , μ_t y η_t son independientes de factores específicos de cada banco, y por tanto ϕ_t también lo es. Esto sugiere que (6) es la solución en el agregado.

3.2. Hogares

El hogar maximiza el valor presente esperado de los flujos de utilidad instantánea. La función de utilidad específico viene dada de acuerdo con Greenwood et al. (1988).

$$\max_{\{C_t, L_t, D_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left\{ \frac{1}{1-\sigma} \left[\left(C_{t+i} - \frac{\chi}{1+\varphi} L_{t+i}^{1+\varphi} \right)^{1-\sigma} - 1 \right] \right\} \quad (12)$$

Donde $\beta \in (0, 1)$ es el factor de descuento, σ es el coeficiente de aversión al riesgo relativo, ϕ es la inversa de la elasticidad de Frisch y χ es un parámetro de escala. La restricción presupuestaria viene dada por:

$$C_t + D_{t+1} = w_t L_t + R_t D_t + \Pi_t \quad (13)$$

Lo cual, implica que los ingresos salariales, $w_t L_t$, siendo w_t es salario real, los rendimientos de los depósitos, $R_t D_t$, siendo R_t la tasa de rendimiento bruto de los depósitos, D_t , y los beneficios que obtiene del resto de los agentes, Π_t , se destinan a la compra de bienes de consumo y acumulación de activos en forma de depósitos.

Debido a la apertura de la economía, el hogar se enfrenta a una cesta de bienes de consumo producidos en la economía doméstica, $C_{H,t}$, y producidos en la economía extranjera, $C_{F,t}$. Como en Galí and Monacelli (2005) y Gertler et al. (2007), esta cesta se agrega en una función de elasticidad de sustitución constante (CES)².

$$C_t = \left[(1 - \gamma_c)^{\frac{1}{\eta_c}} C_{H,t}^{\frac{\eta_c-1}{\eta_c}} + \gamma_c^{\frac{1}{\eta_c}} C_{F,t}^{\frac{\eta_c-1}{\eta_c}} \right]^{\frac{\eta_c}{\eta_c-1}} \quad (14)$$

Donde $\gamma_c \in (0, 1)$ es la participación de los bienes foráneas en el consumo total y $\eta_c > 0$ es la elasticidad de sustitución.

Las condiciones de equilibrio del hogar vienen dadas por:

$$\left(C_t - \frac{\chi}{1+\varphi} L_t^{1+\varphi} \right)^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left(C_{t+1} - \frac{\chi}{1+\varphi} L_{t+1}^{1+\varphi} \right)^{-\sigma} R_{t+1} \quad (15)$$

$$w_t = \chi L_t^{\varphi} \quad (16)$$

La primera representa la ecuación de Euler y la segunda la ecuación de oferta laboral. Así mismo, las condiciones intratemporales vienen dadas por:

$$C_{H,t} = (1 - \gamma_c) (p_{H,t})^{-\eta_c} C_t \quad (17)$$

$$C_{F,t} = \gamma_c (p_{F,t})^{-\eta_c} C_t \quad (18)$$

$$1 = (1 - \gamma_c) (p_{H,t})^{1-\eta_c} + \gamma_c (p_{F,t})^{1-\eta_c} \quad (19)$$

² En el resto del documento se usará el subíndice H para hacer referencia a la economía doméstica y F a la economía foránea, a menos que se diga lo contrario.

Donde $p_{H,t}$ son los precios de los bienes domésticos y $p_{F,t}$ los precios de los bienes foráneos, ambos expresados en términos relativos respecto al Índice de Precios al Consumidor (IPC)³. A partir de las condiciones de primer orden se obtienen las funciones de demanda de consumo.

3.3. Firmas productoras de bienes

Al final del periodo t , una empresa adquiere capital K_{t+1} para utilizarlo en la producción. La compra de capital se financia mediante crédito obtenido del intermediario financiero en cada periodo. Es decir, la empresa emite unos derechos, títulos de crédito u obligación, S_t , iguales al número de unidades de capital, K_{t+1} , a un precio de Q_t . Se supone que las empresas no enfrentan ningún tipo de fricciones al adquirir crédito, esto implica que la empresa siempre cumple con sus obligaciones de deuda. Por arbitraje, se tiene que:

$$Q_t K_{t+1} = Q_t S_t \quad (20)$$

La función de producción, $Y_t = F(A_t, K_t, L_t)$, se escribe de manera estándar.

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (21)$$

Donde $\alpha \in (0, 1)$, es la elasticidad capital-producto y A_t es la Productividad Total de Factores (PTF). La ley de movimiento del capital incorpora costos de ajuste de capital.

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \left[1 - f\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) \right] I_t \quad (22)$$

Siendo $\delta \in (0,1)$ la tasa de depreciación. La función de costos de inversión cumple las propiedades; $f(1) = f'(1) = 0$ y $f''(\cdot) > 0$ y, viene definida de acuerdo con Christiano et al. (2010):

$$f\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) = \frac{1}{2} \left[e^{\sqrt{a}\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)} + e^{-\sqrt{a}\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1\right)} - 2 \right]$$

El parámetro a representa la curvatura de $f(\cdot)$. Al igual que los hogares, las empresas enfrentan una cesta de bienes de inversión indexadas en una función CES.

$$I_t = \left[(1 - \gamma_i)^{\frac{1}{\eta_i}} I_{H,t}^{\frac{\eta_i - 1}{\eta_i}} + \gamma_i^{\frac{1}{\eta_i}} I_{F,t}^{\frac{\eta_i - 1}{\eta_i}} \right]^{\frac{\eta_i}{\eta_i - 1}} \quad (23)$$

³ Es decir, se supone que $p_{H,t} = P_{H,t}/P_t$ es el precio relativo de los bienes de consumo domésticos respecto. De igual forma, se tiene $p_{F,t} = P_{F,t}/P_t$

Donde $\gamma_i \in (0, 1)$ es la participación de los bienes de inversión doméstica en el total y $\eta_i > 0$ es la elasticidad de sustitución.

De ésta forma, las empresas toman decisiones sobre empleo, capital, crédito e inversión, de manera que maximice el valor presente de los beneficios esperados:

$$\max_{\{L_t, K_{t+1}, S_{t+1}, I_t\}} \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t \Pi_t^e$$

Donde Π_t^e es la función de beneficios dada por la diferencia entre ingresos y gastos. Desde un punto de vista contable, la adquisición de crédito se registra como ingresos en el flujo de caja, mientras que los gastos como débito. Así pues.

$$\Pi_t^e = p_{H,t} Y_t + Q_{t+1} S_{t+1} - w_t L_t - R_{K,t} Q_t S_t - I_t$$

De acuerdo a las condiciones de primer orden del problema se obtienen las siguientes condiciones bastante familiares.

$$w_t = (1 - \alpha) p_{H,t} \frac{Y_t}{L_t}$$

$$\mathbb{E}_t R_{K,t+1} = \mathbb{E}_t \left[\frac{\alpha p_{H,t+1} \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + (1 - \delta) Q_{t+1}}{Q_t} \right]$$

$$Q_t = 1 + Q_t f \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) + Q_t f' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} - \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} Q_{t+1} f' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2$$

Así mismo, las condiciones intratemporales vienen dadas por:

$$I_{H,t} = (1 - \gamma_i) (p_{H,t})^{-\eta_i} I_t \tag{24}$$

$$I_{F,t} = \gamma_i (p_{F,t})^{-\eta_i} I_t \tag{25}$$

3.4. Sector de commodities y tasa de cambio real

Como en Fernández et al. (2018) y Bodenstein et al. (2018), la economía pequeña tiene una dotación de commodities, denotado por \bar{C}_o ($\bar{C}_o > 0$). Es decir, la oferta al mercado mundial es inelástica a su precio. También se supone que los beneficios, $\Pi_t C_o$, se acumulan en los hogares. Estos beneficios están dadas únicamente por los ingresos que se generan por las exportaciones, $Y_t^{C_o}$, por lo tanto $\Pi_t^{C_o} = Y_t^{C_o}$. De ésta forma, los ingresos por commodities viene definida por:

$$Y_t^{Co} = p_t^{Co} \overline{C}_o \quad (26)$$

Donde p_t^{Co} es el precio relativo de los commodities en la economía doméstica, la cual se supone que está determinada por los precios internacionales, p_t^{Co*} . Es decir, primero, el nivel de los precios de los commodities en moneda doméstica esta dada por; $P_t^{Co} = \varepsilon_t P_t^{Co*}$. Segundo, definimos $p_t^{Co} = P_t^{Co} / P_t$ como los precios relativos en la economía doméstica respecto al IPC, mientras que $p_t^{Co*} = P_t^{Co*} / P_t^*$ son los precios relativos en la economía foránea en términos del IPC foránea (P_t^*). Usando estas dos definiciones, a demás de la denición de tasa de cambio real dada en (2), se tiene que:

$$p_t^{Co} = \frac{P_t^{Co}}{P_t} = \frac{\varepsilon_t P_t^{Co*}}{P_t} = \frac{\varepsilon_t P_t^{Co*}}{P_t} \frac{P_t^*}{P_t^*} = \left(\frac{\varepsilon_t P_t^*}{P_t} \right) \frac{P_t^{Co*}}{P_t^*}$$

En consecuencia, $p_t^{Co} = e_t p_t^{Co*}$. Por el tamaño de la economía, se supone que los precios de materias primas que se cotizan en los mercados internacionales viene dada por:

$$\ln p_{t+1}^{Co*} = (1 - \rho^{Co}) \ln \overline{p^{Co*}} + \rho^{Co} \ln p_t^{Co*} + \varepsilon_{t+1}^{Co*}$$

Donde $|\rho^{Co}| < 1$ es la persistencia del proceso y $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_{Co}^2)$.

3.5. Equilibrio general

La economía es abierta tanto en el sector comercial como en el sector financiero. En el lado comercial, la cuenta corriente está dada por la balanza comercial:

$$TB_t = (p_t^{Co} \overline{C}_o + p_{H,t} C_{H,t}^*) - (p_{F,t} C_{F,t} + p_{F,t} I_{F,t}) \quad (27)$$

Donde $C_{H,t}^*$ es la demanda externa por bienes domésticos:

$$C_{H,t}^* = \left(\frac{p_{H,t}}{e_t} \right)^{\varepsilon_e} Y^* \quad (28)$$

En la que ε_e es la elasticidad de demanda y Y^* es la producción externa, que se supone exógeno. En consecuencia, la cuenta corriente viene denida por:

$$CA_t = TB_t - R_{B,t} e_t B_t \quad (29)$$

Por el lado de las finanzas internacionales, se supone que los bancos locales adquieren deuda externa denominada en dólares la cual se registra en la cuenta financiera:

$$FA_t = e_t B_t - e_{t-1} B_{t-1} \quad (30)$$

El equilibrio externo implica que la balanza de pagos registra un valor nulo, es decir $CA_t + FA_t = 0$. Así mismo, en equilibrio, el banquero debe ser indiferente entre obtener depósitos de los hogares y deuda de los inversionistas internacionales, lo que implica que $R_{B,t} = R_t$. De esta forma, se cumple la paridad de tasas de interés.

$$\mathbb{E}_t R_{t+1} = \mathbb{E}_t \left[R_{t+1}^* \frac{e_{t+1}}{e_t} \right] \quad (31)$$

Esta relación implica que, tomando en cuenta el tamaño de la economía, la tasa de interés doméstica es igual a la tasa de interés internacional ajustada por el riesgo cambiario. Se supone que R_t^* igue es exógeno. Finalmente, tomando en cuenta los beneficios de las empresas, Π_t^e , los beneficios de los bancos, Π_t^b , y los beneficios del sector de commodities se puede agregar en los beneficios totales; $\Pi_t = \Pi_t^e + \Pi_t^b + \Pi_t^{Co}$, la cual, al sustituir en la restricción de los hogares se puede obtener el cierre macro.

$$GDP_t = p_{H,t} Y_t + p_t^{Co} \bar{C}_o \quad (32)$$

Donde Y_t es está dada por:

$$Y_t = C_{H,t} + I_{H,t} + C_{H,t}^* \quad (33)$$

4. Análisis cuantitativo

4.1. Calibración del estable

Sea θ_1 , un subconjunto de parámetros, cuyos valores numéricos son asignados tomando en cuenta los antecedentes. Gran parte de los valores fueron extraídas de Fernández et al. (2018) (Ver **Cuadro 1**). Con relación a los parámetros que gobiernan el comportamiento de los bancos se calibró de la siguiente manera. La fracción que los bancos pueden enajenar activos se calibró en $\Theta = 0,2$, lo que significa que un 40% de los activos totales pueden ser enajenados. El parámetro que captura la transferencia que realizan los hogares a los bancos nuevos que entran a la industria se calibró en $\kappa = 0,06$, es decir un 6% de los recursos de los bancos salientes de la industria se transfieren a los bancos nuevos. Finalmente, el parámetro de sobrevivencia de los bancos se calibró en 0.94, lo que significa que existe una probabilidad del 94% de permanecer en la industria bancaria.

Cuadro 1: Calibración de parámetros

Definición	Símbolo	Valor
Fracción de los activos enajenables	Θ	0,200
Transferencia a los bancos nuevos	κ	0,06
Probabilidad de sobrevivencia	θ	0,94
Factor de descuento	β	0,988
Coefficiente de aversión al riesgo	σ	2,000
Parámetro de escala de la oferta laboral	ψ^L	7,650
Inversa elasticidad de la oferta laboral	φ	0,580
Ratio del cons. importado en el total	γ_c	0,230
Elasticidad de sustitución-cons.	η_c	0,430
Ratio de inv. importado en el total	γ_i	0,600
Elasticidad de sustitución-inv.	η_i	0,430
Tasa de depreciación del capital	δ	0,024
Ratio del capital en el producto	α	0,320
Elasticidad precio de exportación	ε_e	1,180

El segundo subconjunto de parámetros θ_2 , se calculan endógenamente a partir del estado estable. Este subconjunto viene dada por:

$$\theta_2 = \{\omega, \bar{C}_o, \bar{B}\}$$

El parámetro que captura el grado de fricción nanciera internacional, ϑ , se calibra tomando en cuenta las expresiones (8), (9) y la relación $\nu_t = \omega^{-1}\mu_t$, establecida en la Proposición 1.

La expresión explícita es $\omega = \frac{R - R_B}{\Gamma(\omega)R_K - R}$. La tasa libre de riesgo doméstico, R , se aproxima mediante la tasa de interés de depósitos y R_B se determina por la tasa de interés internacional, $R_B = R^*$. De esta forma, el numerador, $R - R^*$, representa el riesgo país. En cuanto al rendimiento del capital R_K se aproxima mediante la tasa de interés de créditos. La expresión resultante para cada país viene dada por:

$$\omega = \frac{EMBI}{R_K - R}$$

Usando los promedios de las series estadísticas para cada variable; $EMBI$, R_K y R se pueden obtener el valor de ω , que da como resultado $\omega = 0,52$.

Los parámetros de la dotación de commodities y deuda externa bancaria, \bar{C}_o y \bar{B} , respectivamente, se obtienen de manera que se minimice la distancia de los ratios de modelo respecto a los ratios observados. Es decir, consideramos el estado estacionario como un problema de optimización restringida, donde las restricciones corresponden a los ratios de largo plazo observados en los datos. Consideramos esta forma de calibrar con el propósito de disciplinar el modelo. De esta manera, los valores óptimos calibrados son; $\bar{C}_o = 0,77$ y $\bar{B} = 1,43$.

En términos generales, el modelo replica de manera razonablemente bien las relaciones de largo plazo. En el **Cuadro 2** se reportan estas relaciones del modelo comparados con los observados. En primer lugar, se requieren replicar los ratios; deuda externa bancaria/GDP y exportación de commodities/GDP. En cuanto al primera ratio, el modelo proporciona un valor de 13 % mientras que en los datos se observa un valor de 13,7 %. En cuanto al segunda ratio, el modelo sugiere que 11,04 % y los datos 10,8 %. Estos resultados muestran que el modelo reproduce bastante bien estas relaciones de largo plazo. Si se observan otras ratios convencionales, tales como consumo/GDP, inversión/GDP, exportaciones/GDP, entre otros, el modelo también es capaz de replicar los datos.

4.2. Estimación bayesiana

Los parámetros que gobiernan el corto plazo se estiman formalmente usando métodos bayesianos. Este subconjunto de parámetros viene dada por θ_3 .

$$\theta_3 = \{\rho^{C_o}, \rho^A, \sigma_{C_o}, \sigma_A\}$$

Para estimar consideramos series de tiempo para las siguientes variables; índice de precios de commodities ($p_t^{C_o^*}$) y PIB real (GDP). Luego, se extraen los componentes cíclicos usando el filtro HP, para tener procesos estocásticos con media cero y varianza constante.

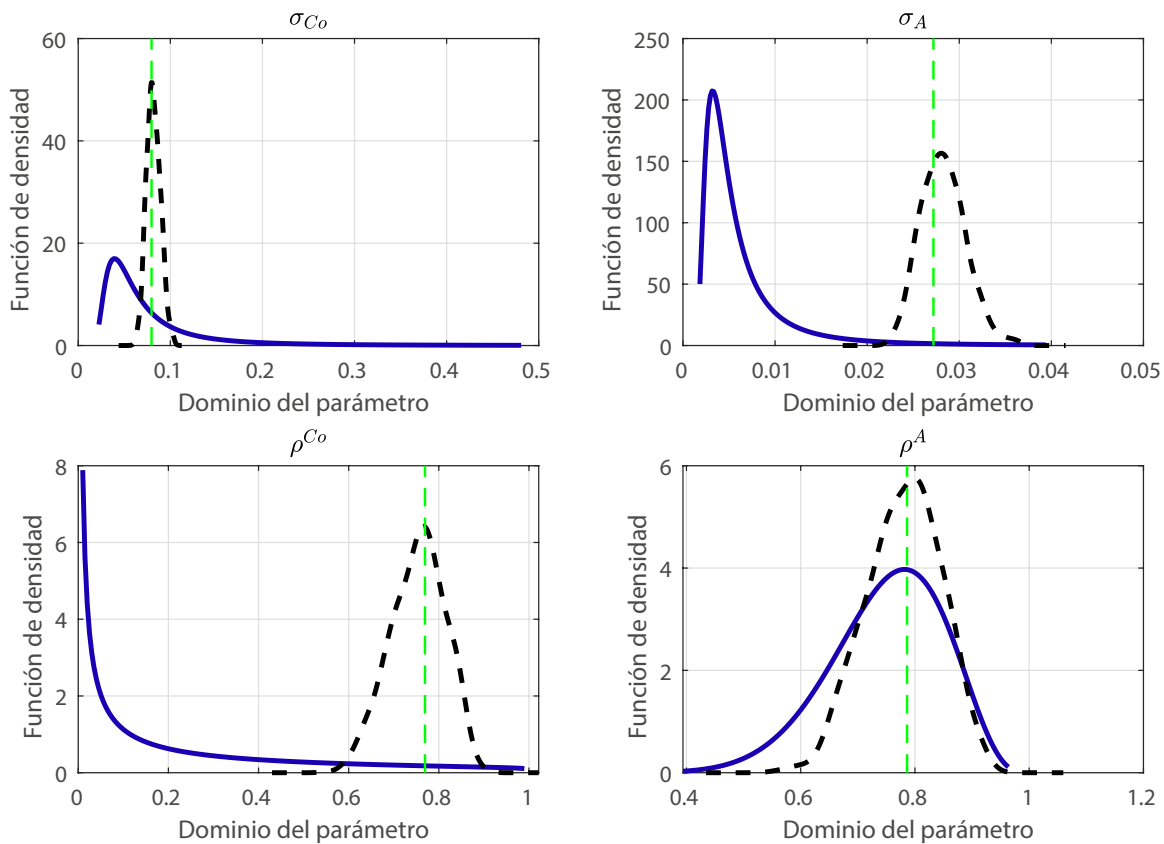
Cuadro 2: Relaciones de largo-plazo: Modelo y datos

Ratios observados	Datos	Modelo
Consumo/PIB	66,9	65,2
Inversión/PIB	22,1	20,6
Exportaciones/PIB	16,9	19,6
Importaciones/PIB	20,5	19,4
Importación Inv./Inv	40,0	28,7
Inversión local/Inv.	60,0	71,3
Importación de cons./Cons.	12,0	17,0
Consumo local/Cons.	91,1	83,0
Exportación commodities/PIB	10,8	11,04
Tasa de interés real externa	4,9	4,9
Deuda externa bancaria/PIB	13,7	13,3
Crédito/PIB	30,8	30,3

Los priors de los parámetros se observan en la **Figura 4**, línea punteada. Se eligió una distribución beta, β , para los coeficientes de persistencia de los procesos estocásticos. En cambio, las prior de las desviaciones estándar de los shocks siguen una distribución gamma inversa, Γ^{-1} .

Las posteriores de los parámetros se obtienen usando el algoritmo Metropolis-Hastings de paseo aleatorio estándar, con 5000 repeticiones de 100 periodos y con una tasa de aceptación del 38 %. Los resultados (moda de las posterior) se observan en la **Figura 4**. Todos los parámetros se estiman con una confianza del 90 %. En cuanto al parámetro de persistencia del proceso AR(1) que sigue los precios de commodities tiene un valor de 0,76 con una desviación de más o menos del 22 %, es decir este parámetro oscila en el intervalo $0,655 \leq \rho^{Co*} \leq 0,861$. Este intervalo sugiere que los shocks de commodities son persistentes en el tiempo, lo cual puede tener implicancias importantes en la dinámica de transición de las variables. El estimador de σ_{Co} es del 0,08, lo que implica una magnitud de shock del 8 %. Por su parte el coeficientes de persistencia del proceso AR(1) de la PTF es del 0,78 y su desviación estándar del 0,0282 ($\approx 0,03$). En general, todas las posteriores son estadísticamente diferentes de los priors, lo que sugiere que los datos contiene información a cerca de los parámetros.

Figura 4: Prior y posteriores de los parámetros



4.3. Análisis de impulso-respuesta

En esta sección se analizan los efectos de los choques de precios de commodities sobre el comportamiento del sistema financiero y de la economía real. En concreto, se comparan las respuestas de las variables de la economía cuyos bancos enfrentan dolarización de pasivos externos versus la economía que no enfrenta dolarización. Para fines prácticos, el modelo de que se desarrollo anteriormente se etiqueta como “modelo con dolarización de pasivos”, mientras que el otro modelo se etiqueta como “modelo sin dolarización”. Este ultimo corresponde al contrafactual del anterior y es equivalente a señalar que la deuda externa de los bancos está denominada en moneda doméstica. Formalmente, el balance del banco, dada por (1), cambia de la siguiente manera:

$$Q_t S_{j,t} = N_{j,t} + D_{j,t} + B_{jt}$$

La evolución del capital bancario, dada por (3), ahora se convierte en:

$$N_{j,t+1} = R_{K,t+1} Q_t S_{j,t} - R_{t+1} D_{j,t} - R_{B,t+1} B_{jt}$$

De esta forma, la solución del modelo sin dolarización de pasivos conduce a:

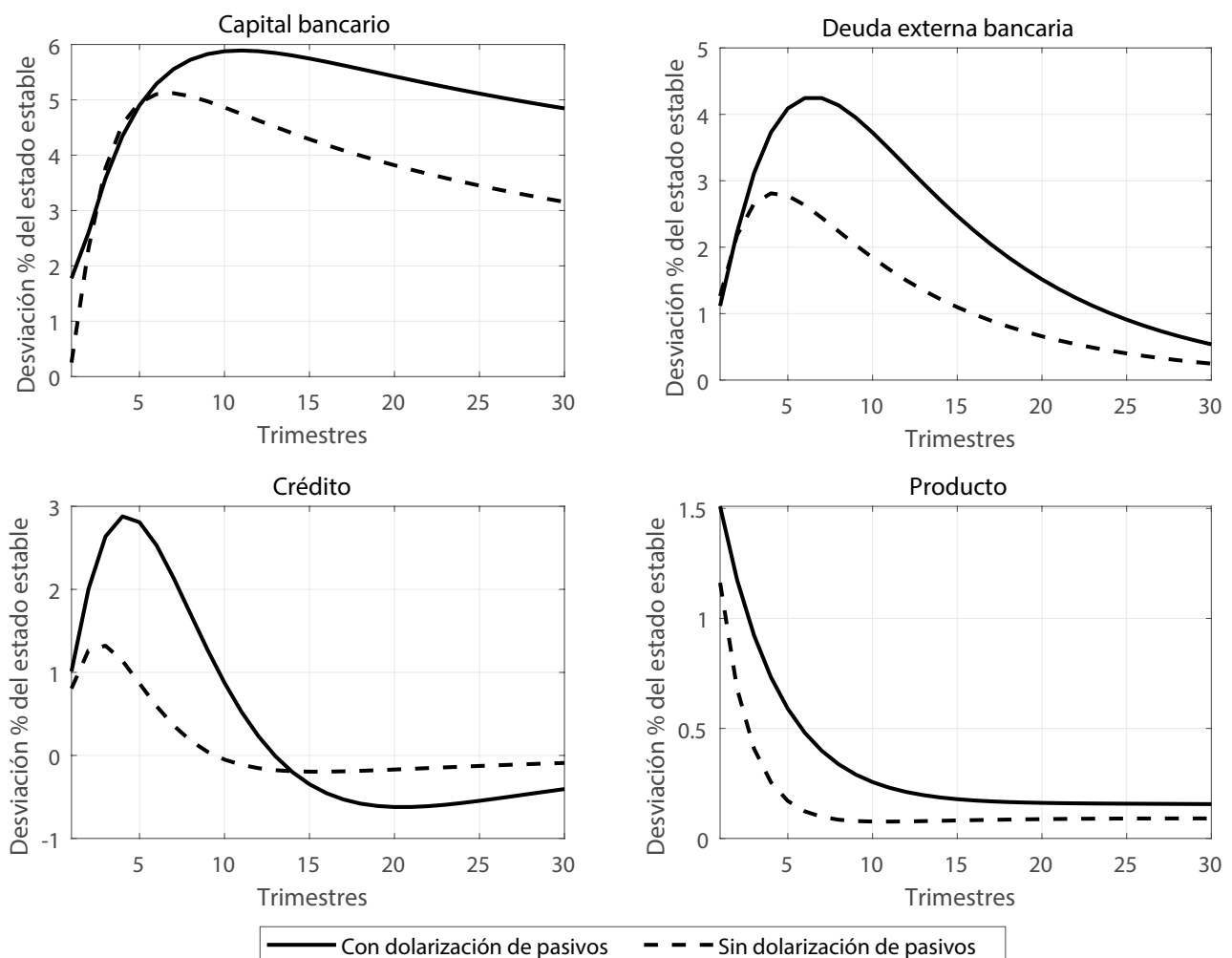
$$Q_t S_t + \omega B_t = \phi_t N_t$$

Ahora bien, el cierre de la balanza de pagos también excluye la dolarización y, por lo tanto, la paridad de tasas de interés descubierta se sustituye por una expresión equivalente al de Schmitt-Grohé and Uribe (2003).

A continuación, ambos modelos se someten a un shocks positivo de precios de commodities equivalente al 8 % de desviación estándar. La **Figura 5** muestra los resultados de las funciones de impulso respuesta. En términos generales, ambos modelos sugieren un comportamiento cualitativo similar. Ante un shock de precios de commodities las variables financieras se desvían positivamente de su tendencia de largo plazo y el producto también se expande. La expansión del sistema financiero se explica por la caída de la tasa de cambio (apreciación de la moneda doméstica), lo que genera un aumento del valor de la deuda externa y el crédito bancario, como consecuencia, el capital de las empresas aumenta y el producto experimenta una fase expansiva.

Si bien los resultados sugieren comportamientos cualitativos similares en ambas economías, las dinámicas de las variables muestran un diferencia cuantitativa importante. En general, las variables reaccionan más fuerte en la economía con dolarización de pasivos bancarios que en la economía sin dolarización. En el momento del impacto, el producto reacciona hasta un 1.5 % en el modelo que incluye dolarización de pasivos frente al 1.1 % en el otro modelo. Este resultado sugiere que los balances de los bancos y la dolarización de pasivos actúan como un acelerador financiero y captura los hechos estilizados que se mostraron anteriormente.

Figura 5: Respuesta ante un shock de commodities



5. Experimentos de política

En esta sección averiguamos cómo la política macroprudencial puede o no amortiguar los efectos de los choques de precios de commodities. Nos concentramos en la regulación de requerimientos de capital bancario, establecidos en las normas de Basilea III. Estas normas señalan que los bancos están sujetos a unos requisitos de capital, según el cual, al menos una fracción de los préstamos bancarios deben ser financiados con capital propio. En concreto, Basilea III incorpora unos requisitos adicionales tales como el colchón anticíclico y sugiere considerar explícitamente las fases del ciclo económico⁴. La literatura ha considerado esta posibilidad particularmente en países desarrollados [Ver, por ejemplo, Covas and Fujita (2010), De Resende et al. (2016), Aliaga-Díaz et al. (2018), Tomura (2018) y Agenor et al. (2018)]. Este conjunto de bibliografía aborda el tema desde una perspectiva de economía cerrada y tomando en cuenta, como papel central, shocks de productividad.

Así, existe una brecha para considerar la posibilidad de examinar el papel de la política macroprudencial en un contexto de economía abierta y la opción de considerar shocks externos, tales como los precios de commodities.

El requerimiento de capital, τ_t , se define de la siguiente manera.

$$\tau_t = \frac{N_t}{Q_t S_t + \gamma_1 \mathcal{R}_t^m} \quad (34)$$

Donde, por simplicidad, suponemos que el denominador en el segundo miembro está compuesto por dos tipos de riesgos; riesgo de crédito y riesgo de mercado. El primer tipo de riesgo, que lo simbolizamos por $Q_t S_t$, hace referencia a la posibilidad de que las empresas no pueda pagar su deuda mientras que, el segundo tipo de riesgo, \mathcal{R}_t^m , hace referencia a la posibilidad de incurrir en pérdidas por las fluctuaciones de la tasa de cambio, ponderada (γ_1) por la fuerza que esta ejerce sobre τ_t .

$$\mathcal{R}_t^m = \mathbb{E}_t \left(\frac{e_{t+1}}{e_t} \right)$$

5.1. Basilea III

A continuación, se toma en cuenta explícitamente los ciclos económicos como determinantes de τ_t . Basilea III señala que; “*el objetivo es asegurar que el sector bancario en su conjunto tenga el capital disponible para ayudar a mantener el flujo de crédito en la economía sin que se cuestione su solvencia cuando el el sistema financiero experimenta estrés después de un período de crecimiento crediticio excesivo ...*”. Para capturar y evaluar los efectos de este tipo de política se plantea el siguiente proceso para τ_t .

$$\log \tau_t - \log \tau_B = \psi_1 (\log \tau_{t-1} - \log \tau_B) + (1 - \psi_1) \psi_2 CC_t$$

Donde ψ_1 es un parámetro que captura la persistencia de la brecha del requerimiento de capital, mientras que ψ_2 es el amortiguador de Basilea III y τ_B es el requerimiento fijado por la autoridad de regulación. El índice de condiciones crediticias, CC_t , está dada por un promedio ponderado entre el ciclo económico y el ciclo financiero.

⁴ Esta normativa de Basilea-III (2010) surgió después de la crisis financiera del 2008 con el objetivo de resolver las deficiencias de las anterior normas. La nueva norma sugiere que en fases de expansión los bancos están obligados a acumular un mayor capital para ser usados en fases de recesión

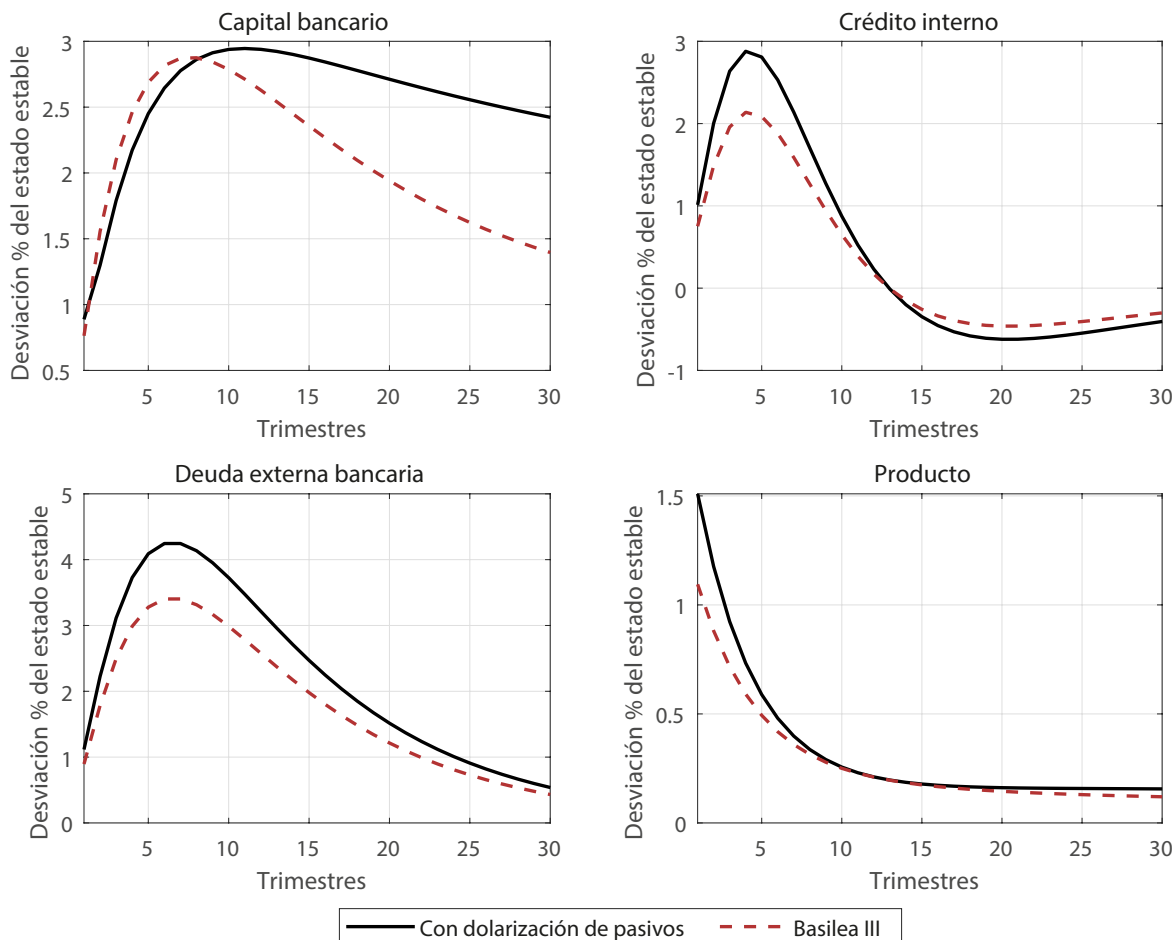
$$CC_t = \eta_B \underbrace{(GDP_t - \overline{GDP})}_{\text{Ciclo económico}} + (1 - \eta_B) \underbrace{(Q_t S_t - \overline{QS})}_{\text{Ciclo financiero}}$$

Donde η_B es un ponderador de los dos tipos de ciclos. Si la economía se encuentra en su fase expansiva, $GDP_t > \overline{GDP}$, entonces el requerimiento aumenta respecto a la regulación de referencia, es decir $\log \tau_t > \log \tau_B$. A la inversa, cuando la economía se encuentra en su fase recesiva, $GDP_t < \overline{GDP}$, la regulación disminuye respecto a la regulación de referencia $\log \tau_t < \log \tau_B$. Cuando la economía se encuentra en equilibrio, entonces la regulación permanece constante. Una interpretación análoga se puede realizar con los ciclos financieros. Nuestro análisis es más interesante en un contexto de economía abierta. Recordemos que el crédito interno está determinado, entre otros, por la deuda externa bancaria, $e_t B_t$, y éste a su vez, determinado por los precios de commodities. Así, cuando la economía y el sistema financiero están en sus fases expansivas, debido a un shock de commodities, las condiciones crediticias crece y éste induce a un mayor requerimiento de capital bancario.

Para realizar el experimento numérico parametrizamos el conjunto $\{\tau_B, \psi_1, \psi_2, \eta_B\}$. Tomando en cuenta $\tau_B = 9\%$. Este valor no incluye colchones de capital anticíclicos, mientras que el parámetro ψ_2 sí incluye. El valor de este parámetro se elige para que coincida con un aumento máximo del 2,5 %, tal como se establece en Basilea III. El parámetro ψ_1 de suavizado en la regulación se elige para que un cambio en los requisitos dure cuatro períodos (un año), $\psi_1 = 0,75$. Se supone que η_B se asigna en $\eta_B = 0,5$, es decir, ambos tipos de ciclos tienen la misma importancia para el índice de condiciones crediticias.

En la Figura 6 se observan el papel de Basilea III frente a un shock de commodities y frente al modelo de referencia (que incluye dolarización de pasivos). Los resultados sugieren que, la regulación bancaria anticíclica tiende a amortiguar la desviación de las variables respecto al equilibrio de largo plazo. Esto sugiere que los bancos, para cumplir con la norma, acumulan capital en épocas de expansión, lo cual afecta al nivel de crédito, que disminuye. Esto es consistente con el espíritu de la regulación dado que busca evitar que los bancos tomen un excesivo riesgo y, por lo tanto, evita un crecimiento del crédito interno. En el sector real de la economía también se observa un efecto amortiguador, debido a que el producto reacciona menos con la política frente al modelo sin política.

Figura 6: Respuesta ante shocks de commodities y Basilea III



5.2. Analisis de bienestar

Examinamos las implicaciones de Basilea III en el bienestar social. Denimos bienestar como en Faia and Monacelli (2007). Se considera como objetivo la función de utilidad de los hogares.

En un escenario sin política, el bienestar condicional viene dada por:

$$W_0 = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, L_t)$$

Mientras que el bienestar en un régimen con política, el bienestar viene dada por:

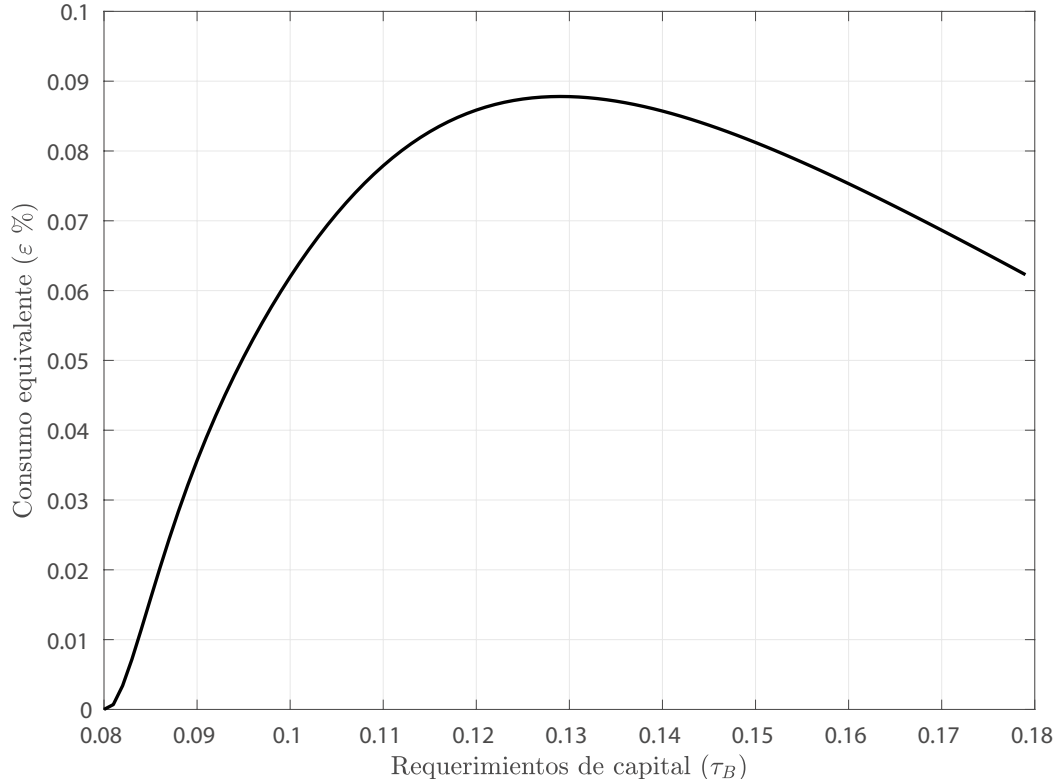
$$W_{0,\varepsilon}^* = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U((1 + \varepsilon)C_t, L_t)$$

Donde ε es la fracción de consumo que el hogar necesitaría en cada periodo en el régimen sin política para obtener el mismo bienestar en el régimen con intervención de política. Es decir, ε representa las ganancias de bienestar expresadas en términos de consumo equivalente. Formalmente, ε debe resolver la igualdad $\mathcal{W}_{0,\varepsilon}^* = \mathcal{W}_0$. Sin embargo, dado que la función de utilidad es de tipo GHH, no existe una expresión cerrada para ε .

Para cuantificar el bienestar, reescribimos la función valor en forma recursiva como en Gertler and Karadi (2011) y luego utilizamos una aproximación de segundo orden de Schmitt-Grohé and Uribe (2004). Se usa este método porque los shocks estocásticos y los parámetros de control en los regímenes de política afectan las transiciones de las variables y el estado estacionario. De manera que el método permite incorporar estos efectos en el cálculo del bienestar⁵.

Se compara el bienestar que se obtendría bajo Basilea III con el bienestar del régimen sin política. En la **Figura 7** se observa el comportamiento de la curva de bienestar que se obtendría en el régimen con política de Basilea III. La curva inicia en el punto, coordenada (0; 8 %), lo que significa que todas las variables empiezan en el estado estacionario inicial no estocástico. En ese punto la regulación bancaria establece un requisito de capital del 8% y la proporción de consumo equivalente es cero, debido a que el bienestar es el mismo en el estado estacionario. Ante un shock de precios de commodities y con intervención de Basilea III, el bienestar social aumenta. De hecho existe un máximo bienestar en un rango razonable de τ_B , en particular un valor de $\tau = 13\%$

Figura 7: Ganancias de bienestar ante diferentes requerimientos de capital



⁴ Esta normativa de Basilea-III (2010) surgió después de la crisis financiera del 2008 con el objetivo de resolver las deficiencias de las anterior normas. La nueva norma sugiere que en fases de expansión los bancos están obligados a acumular un mayor capital para ser usados en fases de recesión

6. Conclusiones

En este documento hemos examinado los efectos de los precios de commodities sobre el sistema bancario y la economía real en Colombia, enfatizando la dolarización de pasivos externos como mecanismo de transmisión. Los hallazgos sugieren que la reacción que experimentan las variables financieras y macroeconómicas con cuantitativamente importante cuando se considera la este mecanismo financiero en comparación a una economía que no considera dicho canal. Sin embargo, el papel de las políticas macro prudenciales contracíclicas, basados en requerimientos de capital bancario variables en el tiempo, permiten mitigar los efectos adversos de los shocks externos. Es decir, amortigua estos efectos haciendo que los ciclos sean mucho más suaves. Pero además, la intervención de este tipo de políticas pueden ayudar a mejorar el bienestar social. Particularmente cuando se consideran las recomendaciones de Basilea III.

Las lecciones que se obtienen de los resultados es que la dolarización de pasivos bancarios pueden tener ventajas y desventajas. Puede ser ventajoso cuando los mercados internacional- les están en crecimiento, porque ayuda a los bancos a un mayor apalancamiento externo a costos menores, sin embargo, es desventajoso cuando los mercados internacionales están en decrecimiento, porque afecta negativamente los balances bancarios y la economía real. En este contexto, la aplicación de política de Basilea III puede ayudar a construir mercados financieros más resilientes ante shocks externos adversos.

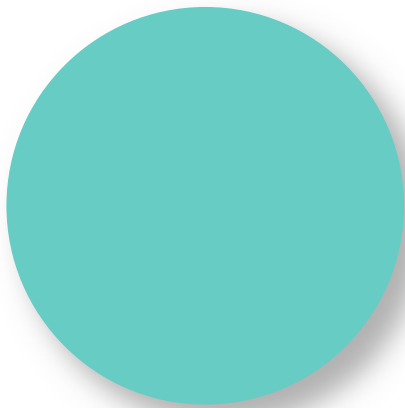
Referencias

- Abraham, F., Cortina Lorente, J. J., and Schmukler, S. L. (2020). Growth of global corporate debt: Main facts and policy challenges. *World Bank Policy Research Working Paper*, (9394).
- Agenor, R., Alper, K., and da Silva, L. P. (2018). Capital regulation, monetary policy, and financial stability. *International Journal of Central Banking*, 9(3):193–238.
- Aldasoro, I. and Ehlers, T. (2018). Global liquidity: Changing instrument and currency patterns. *BIS Quarterly Review*, pages 17–27.
- Aliaga-D'íaz, R., Olivero, M. P., and Powell, A. (2018). Monetary policy and anti-cyclical bank capital regulation. *Economic Inquiry*, 56(2):837–858.
- Basilea-III (2010). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. Bank for International Settlements.
- Bodenstein, M., Kamber, G., and Thoenissen, C. (2018). Commodity prices and labour market dynamics in small open economies. *Journal of International Economics*, 115:170–184.
- Caldara, D., Cavallo, M., and Iacoviello, M. (2019). Oil price elasticities and oil price fluctuations. *Journal of Monetary Economics*, 103:1–20.
- Calvo, G. A. and Reinhart, C. M. (2002). Fear of floating. *The Quarterly Journal of Economics*, 117(2):379–408.
- Céspedes, L. F., Chang, R., and Velasco, A. (2004). Balance sheets and exchange rate policy. *The American Economic Review*, 94(4):1183–1193.
- Christiano, L. J., Trabandt, M., and Walentin, K. (2010). Dsge models for monetary policy analysis. In *Handbook of Monetary Economics*, volume 3, pages 285–367. Elsevier.
- Correia, I., Neves, J., and Rebelo, S. (1995). Business cycles in a small open economy. *European Economic Review*, 39:1089–113.
- Covas, F. and Fujita, S. (2010). Procyclicality of capital requirements in a general equilibrium model of liquidity dependence. *International Journal of Central Banking*, 6(4):137–173.
- De Resende, C., Dib, A., Lalonde, R., and Perevalov, N. (2016). Countercyclical bank capital requirement and optimized monetary policy rules. *Emerging Markets Finance and Trade*, 52(10):2267–2291.
- Drechsel, T. and Tenreyro, S. (2018). Commodity booms and busts in emerging economies. *Journal of International Economics*, 112:200–218.
- Durdu, C. B., Martin, A., and Zer, I. (2019). The role of us monetary policy in global banking crises. finance and economics discussion series 2019-039. washington: Board of governors of the federal reserve system.

- Eichengreen, B. and Hausmann, R. (1999). Exchange rates and financial fragility. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Eichengreen, B., Hausmann, R., and Panizza, U. (2003). The pain of original sin. *Other people's money: Debt denomination and financial instability in emerging market economies*, pages 13–37.
- Eren, E. and Malamud, S. (2021). Dominant currency debt. *Journal of Financial Economics*.
- Faia, E. and Monacelli, T. (2007). Optimal interest rate rules, asset prices, and credit frictions. *Journal of Economic Dynamics and control*, 31(10):3228–3254.
- Fernández, A., González, A., and Rodríguez, D. (2018). Sharing a ride on the commodities roller coaster: Common factors in business cycles of emerging economies. *Journal of International Economics*, 111:99–121.
- Fernández, A., Schmitt-Grohé, S., and Uribe, M. (2017). World shocks, world prices, and business cycles: An empirical investigation. *Journal of International Economics*, 108:S2–S14.
- Galí, J. and Monacelli, T. (2005). Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. *The Reviews of Economic Studies*, (72):707–734.
- Gavin, M. and Hausmann, R. (1996). The roots of banking crises: The macroeconomic context.
- Georgiadis, G. and Zhu, F. (2020). Foreign-currency exposures and the financial channel of exchange rates: Eroding monetary policy autonomy in small open economies? *Journal of International Money and Finance*, page 102265.
- Gertler, M., Gilchrist, S., and Natalucci, F. (2007). External constraints on monetary policy and the financial accelerator. *Journal of Money, Credit and Banking*, 39(2-3):295–330.
- Gertler, M. and Karadi, P. (2011). A model of unconventional monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, 58(1):17–34.
- Greenwood, J., Hercowitz, Z., and Huffman, G. W. (1988). Investment, capacity utilization, and the real business cycle. *The American Economic Review*, pages 402–417.
- Mendoza, E. G. (1991). Real business cycles in a small open economy. *The American Economic Review*, pages 797–818.
- Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2003). Closing small open economy models. *Journal of International Economics*, 61(1):163–185.
- Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2004). Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function. *Journal of economic dynamics and control*, 28(4):755–775.
- Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2018). How important are terms-of-trade shocks? *International Economic Review*, 59(1):85–111.
- Tomura, H. (2018). Asset illiquidity and dynamic bank capital requirements. *International Journal of Central Banking*, 10(3):291–317.

Uribe, M. and Yue, V. (2006). Country spreads and emerging countries: Who drives whom? *Journal of International Economics*, 69(1):6–36.

Zeev, N. B., Pappa, E., and Vicondoa, A. (2017). Emerging economies business cycles: The role of commodity terms of trade news. *Journal of International Economics*, 108:368–376.



**Aso
Ban
Caria** | Acerca la
Banca a los
Colombianos